Termodinámica y Mecánica Estadística I

Guía 2 - 20 de marzo de 2018

Problema 1: Sea $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función homogénea de orden α . Muestre que las derivadas parciales

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_j}$$

son funciones homogéneas de orden $\alpha - 1$.

Problema 2: Considere el sistema descrito por la ecuación fundamental

$$u = \left(\frac{\theta}{R}\right) s^2 - \left(\frac{R\theta}{v_0^2}\right) v^2$$

- Encuentre las tres ecuaciones de estado para el sistema.
- Expresé μ como función de T y P .

Problema 3: Sea un sistema con la ecuación fundamental

$$u = A \frac{s^{5/2}}{v^{1/2}}$$

donde A es una constante.

- Encuentre las tres ecuaciones de estado en la representación entropía.
- Muestre mediante un diagrama (dibujado a escala arbitraria) la dependencia de la temperatura con el volumen para una presión fija. Dibuje en un diagrama V - T dos isobaras, correspondientes a dos valores de presión distintos, e indique cuál corresponde a la mayor presión.

Problema 4: Las cantidades macroscópicas que describen el estado de equilibrio de una banda elástica son su longitud L , la tensión Y , la temperatura T y la energía U . La longitud juega un rol análogo al volumen de un gas mientras que la tensión actúa como una *presión negativa*. Sea L_o la longitud de la banda en ausencia de tensión y sea $L \geq L_o$ la longitud de la banda estirada. En el régimen elástico $L < L_1$ (siendo $L_1 > L_o$ alguna longitud característica) se observa experimentalmente que $Y = A(L/N)T$, donde $A(L/N) > 0$ es una función únicamente de L/N y es monótona creciente. Asumiendo que $U(L, T) = U(T)$ es una función monótona creciente de T :

- Muestre que la entropía decrece con L (a T constante).
- Muestre que la temperatura aumenta cuando la banda se estira adiabáticamente. Muestre también que la banda se contrae si se aumenta la temperatura manteniendo la tensión constante.
- Suponga ahora que $U(T)$ y $A(L/N)$ son funciones lineales de T y L respectivamente. Encuentre la relación fundamental.

Problema 5: Dos sistemas particulares, separados por una pared diatérmica, tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{3}{2} R \frac{n^{(1)}}{U^{(1)}}$$

$$\frac{1}{T^{(2)}} = \frac{5}{2} R \frac{n^{(2)}}{U^{(2)}}$$

donde $R = 1,986 \text{ cal/mol K}$, $n^{(1)} = 2$ y $n^{(2)} = 3$.

- a) ¿Cuál es la energía interna de cada sistema en el estado de equilibrio, si la energía total en el sistema compuesto es 6000 cal?
- b) Si las temperaturas iniciales son $T^{(1)} = 250$ K y $T^{(2)} = 350$ K. ¿Cuáles son los valores de $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ una vez establecido el equilibrio? ¿Cuál es la temperatura de equilibrio?

Problema 6: Dos sistemas particulares tienen las ecuaciones de estado siguientes:

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{3}{2}R \frac{n^{(1)}}{U^{(1)}}, \quad \frac{P^{(1)}}{T^{(1)}} = R \frac{n^{(1)}}{V^{(1)}},$$

$$\frac{1}{T^{(2)}} = \frac{5}{2}R \frac{n^{(2)}}{U^{(2)}}, \quad \frac{P^{(2)}}{T^{(2)}} = R \frac{n^{(2)}}{V^{(2)}},$$

donde $R = 1,986$ cal/mol K. El número de moles del primer sistema es $n^{(1)} = 0,5$ y el del segundo es $n^{(2)} = 0,75$. Los dos sistemas están contenidos en un cilindro aislado, separados por un pistón diatérmico móvil. Las temperaturas iniciales son $T^{(1)} = 200$ K y $T^{(2)} = 300$ K, y el volumen total es 20 ℓ . ¿Cuáles son la energía y el volumen de cada sistema en equilibrio? ¿Cuáles la presión y la temperatura?

Problema 7: La ecuación fundamental de un sistema de dos componentes es

$$S = nA + nR \ln \left(\frac{U^{3/2}V}{n^{5/2}} \right) - n_1R \ln \left(\frac{n_1}{n} \right) - n_2R \ln \left(\frac{n_2}{n} \right)$$

donde $n \equiv n_1 + n_2$ y A es una constante arbitraria. Un cilindro rígido cerrado de volumen total 10 ℓ está dividido en dos cámaras de igual volumen por una membrana rígida diatérmica, permeable a la primera componente pero impermeable a la segunda. En una de las cámaras se introduce una muestra del sistema con parámetros originales $n_1^{(1)} = 0,5$, $n_2^{(1)} = 0,75$, $V^{(1)} = 5\ell$ y $T^{(1)} = 300$ K. En la segunda cámara se introduce una muestra con parámetros originales $n_1^{(2)} = 1$, $n_2^{(2)} = 0,5$, $V^{(2)} = 5\ell$ y $T^{(2)} = 250$ K. Luego de alcanzado el equilibrio, ¿cuáles son los valores de $n_1^{(1)}$, $n_1^{(2)}$, T , $P^{(1)}$ y $P^{(2)}$?

Problema 8: En la representación energía U es función de la entropía y los parámetros extensivos $\{X_j\}_1^r$, y se definen los parámetros intensivos como

$$T = \frac{\partial}{\partial S}U(S, \{X_j\}) \quad ; \quad P_k = \frac{\partial}{\partial X_k}U(S, \{X_j\})$$

En la representación entropía, S es función de la energía interna U y las variables extensivas X_j . Llamando $X_0 = U$, y definiendo los parámetros intensivos en esta formulación como

$$F_k = \frac{\partial S}{\partial X_k}$$

demuestre que:

$$F_0 = \frac{1}{T}, \quad F_k = \frac{-P_k}{T}$$