Termodinámica y Mecánica Estadística I

Guía 3 - 27 de marzo de 2018

Problema 1: Caracterizamos un gas ideal monoatómico por las ecuaciones de estado

$$PV = nRT$$

$$U = \tfrac{3}{2}nRT$$

Obtenga la ecuación fundamental para este gas.

Problema 2: Dos moles de gas ideal monoatómico se expanden cuasiestática y adiabáticamente desde una temperatura $T=0°$C y una presión $P=1$ atm hasta que la temperatura final del sistema es $T=-50°$C.

a) ¿Cuáles son los volúmenes inicial y final y la presión final del sistema?

b) Calcule el trabajo realizado por el gas. ¿Cuáles son las energías internas inicial y final?

Problema 3: Un matraz contiene 1 g de O_2 a presión $P_o=1$ atm y temperatura $T_o=47°$C. Al cabo de un cierto tiempo, y a causa de una pérdida, la presión desciende a 5/8 de su valor inicial y la temperatura baja a $T=27°$C.

a) ¿Cuál es el volumen del matraz?

b) ¿Qué peso de O_2 se perdió entre las dos observaciones?

Considere al gas como ideal.

Problema 4: Un tanque que contiene gas He tiene un volumen de 1000 ℓ. El gas tiene una presión de 1/2 atm y una temperatura de 20°C. Un segundo tanque del mismo volumen contiene He a una presión de 1 atm y una temperatura de 80°C. Una válvula que conecta los dos tanques se abre. Suponiendo al He como un gas ideal monoatómico y las paredes de los tanques rígidas y adiabáticas, encuentre la temperatura y presión finales del sistema.

Ayuda: Note que la energía interna total es constante.

Problema 5: Si un gas ideal monoatómico se expande en una región vacía, aumentando su volumen inicial V_o hasta un volumen final λV_o, y si las paredes son rígidas y adiabáticas, ¿cuál es el cociente entre las presiones inicial y final? ¿Cuál es la diferencia entre las entropías final e inicial?

Problema 6: Considere un sistema termodinámico con una relación fundamental de la forma $S(U, X, n)$. Demuestre que se satisface la siguiente relación:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{T,n} = Y - T\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_{X,n}$$

donde Y representa al parámetro intensivo asociado a la variable extensiva X (Por ejemplo, si $X=V$, entonces $Y=-P$).

Problema 7: Muestre que para un gas ideal monoatómico

$$c_v = \frac{3}{2}R\,, \qquad \alpha = \frac{1}{T}\,, \qquad \kappa_T = \frac{1}{P} \qquad \text{y} \qquad c_P = \frac{5}{2}R\,.$$

Usando estos resultados corrobore la ecuación

$$c_P = c_v + \frac{TV\alpha^2}{n\kappa_T}$$

Problema 8: Una aproximación empírica para describir los apartamientos del comportamiento de los gases reales es la ecuación de estado de Van der Waals

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$$

a) Calcule α y κ_T y $c_p - c_v$ para el gas de Van der Waals, y compare con el gas ideal.

b) ¿Qué condición impone esta ecuación para el calor específico a volumen constante? ¿Es posible obtener información de la dependencia de c_v con T?

c) Encuentre la ecuación fundamental para este sistema, suponiendo $c_v = \text{cte}$.

Problema 9: Considere un sistema magnético, descripto por la ecuación de estado $M = f(B_o, T)$, donde M es la magnetización del sistema y B_o el campo magnético aplicado. En principio f es una función arbitraria pero diferenciable.

a) Exprese el diferencial de energía interna en función de T y M y determine qué condición debe satisfacer el calor específico a magnetización constante en términos de la ecuación de estado.

b) Suponga ahora que la ecuación de estado tiene la forma particular

$$M = f(B_o/T)\ ,$$

donde ahora f es una función continuamente diferenciable que sólo depende del cociente B_o/T. Verifique que bajo esta suposición U y c_M sólo dependen de la temperatura.

c) Suponga ahora que la ecuación de estado tiene la forma particular conocida como ley de Curie: $M = nDB_o/T$ (D es una constante) y c_M es constante. Escriba la ecuación fundamental en la representación entropía.

Problema 10: La radiación de cuerpo negro es radiación electromagnética dentro de una cavidad cerrada en equilibrio con las paredes para alguna temperatura T. Se encuentra que si el volumen de la cavidad se incrementa para un valor de T fijo se genera más radiación, pero la densidad de energía (por unidad de volumen) e permanece constante. Por lo tanto la energía interna deberá tener la forma $U = Ve(T)$, donde V es el volumen y $e = e(T)$ depende sólo de la temperatura. Además se encuentra que la radiación ejerce una presión $P = e(T)/3$ sobre las paredes. Encuentre la dependencia de e, U, P y S con la temperatura.

Problema 11: Considere el gas ideal multicomponente descripto por las ecuaciones

$$\begin{aligned} S &= \sum_j n_j \left(\frac{S_{oj}}{n_o}\right) + \sum_j \frac{3}{2} n_j R \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) + \sum_j n_j R \ln\left(\frac{V n_o}{V_o n_j}\right) \\ U &= \sum_j n_j \left(\frac{U_{oj}}{n_o}\right) + \sum_j \frac{3}{2} n_j R \,(T - T_o) \end{aligned}$$

a) Verifique que el parámetro T corresponde a la temperatura termodinámica.

b) Derivando la presión P para el sistema, determine la ecuación de estado que satisface el gas ideal multicomponente.

Verifique que la presión del sistema está dada por la suma de las presiones parciales de cada uno de los gases componentes, definidas como la presión que cada gas tendría en iguales condiciones de volumen y temperatura.

Problema 12: Diez gramos de He, N_2 y O_2 puros están contenidos en tres recipientes conectados por válvulas. Las válvulas de los respectivos contenedores se abren, permitiendo que el sistema alcance el equilibrio. Las paredes de los contenedores se suponen rígidas y adiabáticas, y los gases se suponen ideales. ¿Cuáles serán la temperatura y presión finales de la mezcla de gases en las condiciones que se detallan a continuación? ¿Cuál será el cambio en la entropía?

a) Si la presión inicial en cada recipiente es 1 atm y la temperatura 150°C.

b) Si la presión inicial en cada recipiente es 1 atm y las temperaturas son 100°C, 150°C y 200°C respectivamente.

c) Si la temperatura inicial en cada recipiente es 150°C y las presiones 1 atm, 1,5 atm y 2 atm respectivamente.

Problema 13: Considere un sistema descripto por la variable extensiva X, asociada a la variable intensiva $Y = (\partial U/\partial X)_{S,n}$. Teniendo en cuenta la definición para la capacidad calorífica a X constante

$$C_X = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{X,n} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{X,n},$$

escriba la definición correcta para C_Y y demuestre que

$$C_Y = C_X + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{T,n} - Y\right]\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_{Y,n}$$

Demuestre además que

$$C_Y = C_X + T\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_{Y,n}$$

A partir de las expresiones anteriores muestre también que

$$-\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\, T^2}\right)_{X,n} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial C_X}{\partial X}\right)_{T,n}$$

Problema 14: La ecuación de estado para los gases ideales

$$PV = nRT$$

constituye una aproximación para el comportamiento de los gases reales para temperaturas altas y grandes volúmenes molares (V/n). Los apartamientos del comportamiento ideal para bajas densidades pueden aproximarse por la expansión del virial

$$P = \frac{nRT}{V}\left(1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \ldots\right).$$

Identifique los primeros coeficientes de la expansión del virial para un gas que satisface la ecuación de Van der Waals

$$P = \frac{nRT}{V - bn} - \frac{n^2 a}{V^2}.$$