

Gas de Fermi-Dirac

$$Z_{\mu}^{\text{FD}}(T, V) = \prod_{\ell=0}^{\infty} (1 + ze^{-\beta \epsilon_{\ell}})^{g_s} \quad (g_s \neq 1 \text{ siempre})$$

$$\hookrightarrow \Omega_{\text{FD}}(T, V, \mu) = -kT g_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \ln(1 + ze^{-\beta \epsilon_{\ell}})$$

$$\langle N \rangle = - \left(\frac{\partial \Omega_{\text{FD}}}{\partial \mu} \right)_{T, V} = g_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_{\ell}} + 1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{g_s}{e^{\beta(\epsilon_{\ell} - \mu)} + 1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} g_s \langle n_{\ell} \rangle$$

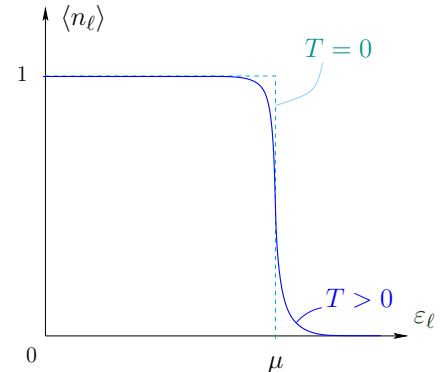
$$T = 0 \quad \leftrightarrow \quad \beta = \infty :$$

todos los niveles se despueblan

excepto cuando $\epsilon_{\ell} < \mu$

Límite termodinámico : ϵ continua

$$\hookrightarrow n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$



Gas de Fermi-Dirac

$$\sum_{\ell} f(p_{\ell}) \Delta \ell_x \Delta \ell_y \Delta \ell_z \rightarrow \frac{4\pi V}{h^3} \int dp p^2 f(p) = \frac{4\sqrt{2}\pi m^{3/2} V}{h^3} \int d\epsilon \sqrt{\epsilon} f(\epsilon)$$

$$\Omega_{\text{FD}}(T, V, \mu) = -kT g_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon_{\ell}}) \rightarrow \Omega_{\text{FD}}(T, V, \mu) = -\frac{g_s k T V}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

$$f_{5/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \ln(1 + z e^{-x^2}) \left[= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} z^j}{j^{5/2}} \quad \text{si } z < 1 \right]$$

$$\Omega = -PV \rightarrow U = \frac{3}{2} PV \quad (\text{igual que Bose-Einstein})$$

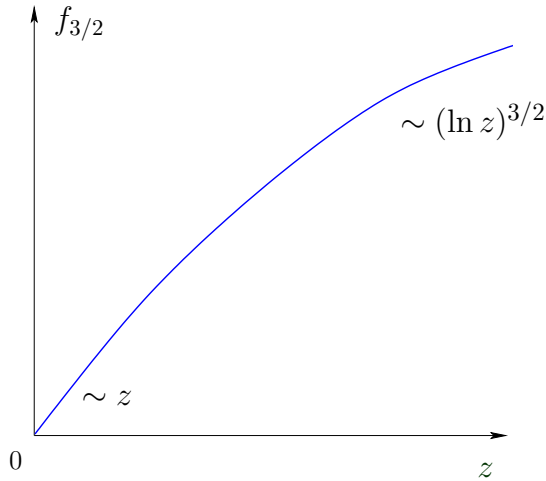
$$\langle N \rangle = z \left(\frac{\partial \ln Z(\beta, V, z)}{\partial z} \right)_{\beta, V} = \frac{g_s V}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

$$f_{3/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \frac{1}{z^{-1} e^{x^2} + 1} = z \frac{\partial f_{5/2}(z)}{\partial z} \left[= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} z^j}{j^{3/2}} \quad \text{si } z < 1 \right]$$

Gas de Fermi-Dirac

$$f_{3/2}(z) \text{ creciente con } z \quad \rightarrow \quad e^{\beta\mu} = z \rightarrow 0 \quad \leftrightarrow \quad \mu \rightarrow -\infty$$

$$T \rightarrow \infty \quad T \rightarrow \infty$$



$$z \rightarrow \infty \quad \leftrightarrow \quad \frac{\mu}{T} \rightarrow +\infty : \quad \mu > 0 \quad \text{acotado}$$

$$T \rightarrow 0 \quad T \rightarrow 0$$

análisis para $T \rightarrow 0$:

$f_{3/2}(z)$ para z grandes

$$U = \sum_{\ell} g_s \langle n_{\ell} \rangle \epsilon_{\ell} \rightarrow \frac{4\sqrt{2} \pi g_s m^{3/2} V}{h^3} \int_0^{\infty} d\epsilon \sqrt{\epsilon} \epsilon n(\epsilon) = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon n(\epsilon)$$

$$\langle N \rangle = \sum_{\ell} g_s \langle n_{\ell} \rangle \rightarrow \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n(\epsilon) \quad \text{densidad de estados } g(\epsilon)$$

Gas de Fermi-Dirac - T bajas

$$U = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \epsilon n(\epsilon) \quad \langle N \rangle = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) n(\epsilon) \quad \rightarrow \quad \text{en general } I = \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) n(\epsilon)$$

desarrollo de Sommerfeld :

(Schwabl)

$$I = \underbrace{\int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon)}_{\text{primer término : límite } T \rightarrow 0} + \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) \left[n(\epsilon) - \underbrace{\Theta(\mu - \epsilon)}_{\substack{\uparrow \\ \text{función escalón de Heaviside}}} \right]$$

$$I \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \underbrace{\int_{-\infty}^\infty d\epsilon f(\epsilon) \left[n(\epsilon) - \Theta(\mu - \epsilon) \right]}_{\text{impar alrededor de } \epsilon = \mu}$$

expansión de Taylor de $f(\epsilon)$ alrededor de μ ... $x = (\epsilon - \mu)/(kT)$

$$I = \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (kT)^4 f'''(\mu) + \dots$$

expansión de Sommerfeld

Gas de Fermi-Dirac - T bajas

$$I = \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) n(\epsilon) = \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (kT)^4 f'''(\mu) + \dots$$

expansión de Sommerfeld

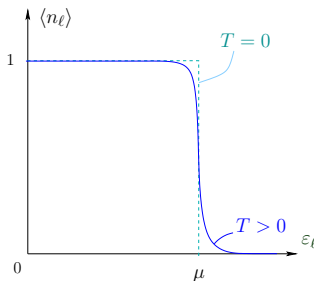
la aplicamos a

$$\langle N \rangle = \sum_{\ell} g_s \langle n_{\ell} \rangle \rightarrow \frac{g_s m^{3/2} V}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} n(\epsilon) = \frac{g_s V}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

sustituyendo ... despejamos $f_{3/2}(z)$ para z grandes (T chicas)

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right] \quad \text{(ejercicio)}$$

bajas temperaturas o altas densidades $\leftrightarrow \lambda^3/v \gg 1$, aproximamos la ec. anterior



$$\frac{1}{v} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \frac{g_s}{\lambda^3} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]$$

$$\hookrightarrow \mu(T=0) \equiv \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{g_s v} \right)^{2/3}$$

energía de Fermi

Gas de Fermi-Dirac - T bajas

$$kT_F = \epsilon_F \quad \rightarrow \quad \text{temperatura de Fermi } T_F \equiv \epsilon_F/k$$

$T \ll T_F$: gas “degenerado”, las partículas tienden a ocupar los estados de menor energía

puede “invertirse” $f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]$
($T \ll T_F \leftrightarrow z \gg 1$)

$$\hookrightarrow \mu (= kT \ln z) = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

(ejercicio)

exp. Sommerfeld $U = \frac{3}{5} \langle N \rangle \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$

energía del estado fundamental

$$U = \frac{3}{2} PV \quad \rightarrow \quad P \approx \frac{2}{5} \frac{\epsilon_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad P(T=0) \neq 0$$

Gas de Fermi-Dirac - T altas

T altas o bajas densidades $\rightarrow \lambda^3/v \ll 1$ (no se notaría la cuántica)

$$\hookrightarrow z \rightarrow 0$$

$$\frac{\lambda^3}{g_s v} = f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots$$

“invirtiendo”

$$z = \frac{\lambda^3}{g_s v} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{g_s v} \right)^2 + \dots$$

(ejercicio)

$\rightarrow$ si $\lambda^3/(g_s v)$ muuuuy pequeño conservamos sólo el primer término : Maxwell-Boltzmann

$$\frac{Pv}{kT} = \frac{4\pi g_s v}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 + z e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \right) = \frac{g_s v}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

$$\hookrightarrow \frac{Pv}{kT} = \frac{g_s v}{\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{g_s v} + \dots$$

Maxwell-Boltzmann

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau (Huang)

teorema de Van Leewen : no existe el diamagnetismo (el magnetismo en general) en la clásica

Landau (1930) : **cuantización de órbitas** de partículas cargadas en un campo magnético

→ susceptibilidad magnética *por unidad de volumen*

$$\chi = \left(\frac{\partial M'}{\partial B} \right)_T \quad M' : \text{momento magnético por } u / \text{volumen}$$

ensamble canónico : acoplamiento con campo externo →

$$G(T, B, N) = -kT \ln Z_N(T, B) \quad \Rightarrow \quad M' = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial G}{\partial B} \right)_{T,N} = \frac{kT}{V} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z_N$$

$$\hookrightarrow \text{gran canónico :} \quad M' = - \left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\tilde{\Omega}}{V} \right) \right]_{T(V),z} = kT \left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\ln Z_\mu}{V} \right) \right]_{T(V),z}$$

$$\tilde{\Omega} = \dots - BM \dots$$

V irrelevante en general

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau

diamagnético : $\chi < 0$

paramagnético : $\chi > 0$

núcleos de una red cristalina : $\mu_{\text{nucl}} \ll \mu_e$ (típicamente 1000 veces más chico)

alineamiento de espines con campo externo $\rightarrow$ **paramagnetismo**

compite con el movimiento orbital
(gas de electrones libres)

campo magnético externo $\rightarrow$ $\mathbf{A}$ (potencial vector)

$$\hookrightarrow \hat{H}_1 = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (\text{no relativista})$$

ec. Schrödinger independiente de t invariante ante transformaciones de gauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla \omega(\mathbf{r}) \qquad \psi(\mathbf{r}) \longrightarrow e^{-\frac{ie}{\hbar c} \omega(\mathbf{r})} \psi(\mathbf{r})$$

$\omega(\mathbf{r})$ cualquier función continua

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau

para $\mathbf{B} = B\hat{k}$, elegimos $A_x = -By$ $A_y = A_z = 0$

$$\hookrightarrow \hat{H}_1 = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x - \frac{eB}{c} y \right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right]$$

$\hbar k_\alpha$ autovalor de $\hat{p}_\alpha \rightarrow$ proponemos $\psi(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_z z)} f(y)$

autoenergía $\epsilon \rightarrow \left[\frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{1}{2} m \omega_o^2 (y - y_o)^2 \right] f(y) = \epsilon' f(y) \quad \star$ (ejercicio)

$$\omega_o \equiv \frac{eB}{mc} \text{ frecuencia ciclotrónica} \quad y_o \equiv \frac{\hbar c}{eB} k_x \quad \epsilon' \equiv \epsilon - \hbar^2 k_z^2 / (2m)$$

órbitas circulares clásicas - m , e , B uniforme

$\star \rightarrow f(y)$: oscilador armónico en y_o

autovalores de $\hat{H}_1$:

$$\epsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar \omega_o \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad \text{niveles de Landau}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots \quad p_z \equiv \hbar k_z$$

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau

$$\epsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_o \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad \text{niveles de Landau}$$

independientes de k_x $\rightarrow$ degeneración = número de valores de k_x permitidos

$$y_o = \frac{\hbar c}{eB} k_x = \frac{\hbar c}{eB} \frac{2\pi}{L} n_x \quad (\text{material de longitud } L)$$

$$\hookrightarrow \text{dentro del material : } y_o \leq L \Rightarrow n_x \leq \frac{eB}{\hbar c} L^2 = g \quad (\text{degeneración})$$

entonces $B \neq 0$: energías asociadas al movimiento en el plano x - y **dejan de ser continuas**

$\rightarrow$ fermiones libres bajo un campo :

$$Z_\mu = \prod_{\ell} (1 + ze^{-\beta \epsilon_\ell})^g$$

$$\ell = (p_z, j) \quad \text{o} \quad \ell' = (p_z, j, \alpha) \quad \leftarrow \text{valores posibles para } k_x : \alpha = 1, 2, \dots, g$$

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau

$$Z_\mu = \prod_{\ell'} (1 + ze^{-\beta \epsilon_\ell}) \quad \rightarrow \quad \ln Z_\mu = \sum_{\alpha=1}^g \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p_z} \ln \left[1 + ze^{-\beta \epsilon(p_z, j)} \right]$$

$\epsilon(p_z, j)$ independiente de α $\leftrightarrow$ repetir g veces el resto

límite termodinámico : p_z continuos ... (1D : ejercicio)

$$\ln Z_\mu = \frac{2gL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp \ln \left[1 + ze^{-\beta \epsilon(p, j)} \right]$$

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial \ln Z_\mu}{\partial z} = \frac{2gL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon(p, j)} + 1}$$

T altas : $z \rightarrow 0$ para que $\langle N \rangle$ no diverja (ejercicio)

$$\hookrightarrow \ln Z_\mu \simeq \frac{2gzL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp e^{-\beta \left[\frac{p^2}{2m} + \hbar \omega_o \left(j + \frac{1}{2} \right) \right]}$$

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau

$$\ln Z_\mu \simeq \frac{2gzL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta[\hbar\omega_o(j+\frac{1}{2})]} \int_0^{\infty} dp \, e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \frac{gzL}{\lambda} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \quad (\text{ejercicio})$$

$\uparrow$
 $x \equiv \hbar\omega_o/(2kT)$

$x \rightarrow 0$ para T altas : desarrollamos en serie de Taylor y agrupamos *adecuadamente* ...

$$\ln Z_\mu \simeq \frac{gzL}{\lambda} \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = \frac{zV}{\lambda^3} \left[1 - \frac{1}{24} \left(\frac{\hbar\omega_o}{kT}\right)^2\right] \quad (\text{ejercicio})$$

$$\hookrightarrow \chi = -\frac{z}{3kT\lambda^3} \left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \quad (\neq 0) \quad (\text{ejercicio})$$

(¡tomá Van Leewen!)

$\chi < 0$: **diamagnético**

$$z \text{ pequeños : } \langle N \rangle = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_\mu \quad \text{coincide con } \ln Z_\mu \quad \rightarrow \quad \frac{\langle N \rangle}{V} \simeq \frac{z}{\lambda^3}$$

reemplazando

$$\chi = -\frac{1}{3kTv} \left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \quad \text{Curie : } \chi \propto \frac{1}{T}$$