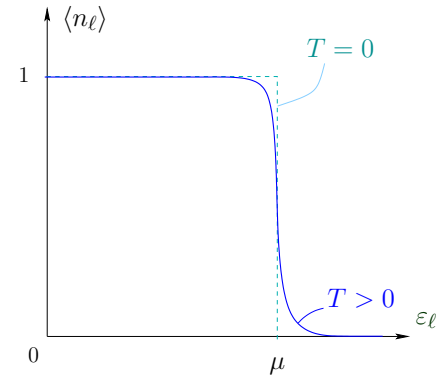


Gas de Fermi-Dirac

límite termodinámico : ϵ continua

$$\hookrightarrow n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

$$\mu(T=0) \equiv \epsilon_F$$



$$\sum_{\ell} f(p_{\ell}) \Delta \ell_x \Delta \ell_y \Delta \ell_z \rightarrow \frac{4\pi V}{h^3} \int dp p^2 f(p) = \frac{4\sqrt{2}\pi m^{3/2} V}{h^3} \int d\epsilon \sqrt{\epsilon} f(\epsilon)$$

$$\Omega_{\text{FD}}(T, V, \mu) = -kT g_s \sum_{\ell=0}^{\infty} \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon_{\ell}}) \rightarrow \Omega_{\text{FD}}(T, V, \mu) = -\frac{g_s k T V}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

$$f_{5/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \ln(1 + z e^{-x^2}) \quad \left[= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} z^j}{j^{5/2}} \quad \text{si } z < 1 \right]$$

$$\langle N \rangle = z \left(\frac{\partial \ln Z(\beta, V, z)}{\partial z} \right)_{\beta, V} = \frac{g_s V}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

$$f_{3/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \frac{1}{z^{-1} e^{x^2} + 1} = z \frac{\partial f_{5/2}(z)}{\partial z} \quad \left[= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} z^j}{j^{3/2}} \quad \text{si } z < 1 \right]$$

Gases de fermiones libres

- ▶ e^- en la banda de conducción de un sólido (potencial periódico *débil*)

$$v = \frac{\langle N \rangle}{V} \simeq (2\text{\AA})^3 \rightarrow \lambda_T \simeq 43\text{\AA} \text{ a } T \text{ ambiente} \quad (\text{fuerte solapamiento})$$

- ▶ gases inertes con n° impar de nucleones interactúan muy débilmente entre ellos

$\rightarrow$ F-D en ^3He recién se nota a $T < 3\text{ K}$

- ▶ **núcleo atómico** : protones y neutrones (fermiones)

modelo de partículas no interactuantes puede brindar una buena descripción

(densidad tan alta $\rightarrow T = 0\text{ K}$)

- ▶ **estrella neutrónica** $\leftarrow$ “supernova” $\leftarrow$ estrellas masivas (mueren)

densidad altísima de neutrones ... fermiones libres

- ▶ **enanas blancas**

materia altamente ionizada : núcleos livianos (gas M-B) + e^- (alta *degeneración*)

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau (Huang)

teorema de van Leewen : no existe el diamagnetismo (el magnetismo en general) en la clásica

Landau (1930) : **cuantización de órbitas** de partículas cargadas en un campo magnético

→ susceptibilidad magnética *por unidad de volumen*

$$\chi = \left(\frac{\partial M'}{\partial B} \right)_T \quad M' : \text{momento magnético por } u / \text{volumen}$$

ensamble canónico : acoplamiento con campo externo →

$$G(T, B, N) = -kT \ln Z_N(T, B) \quad \Rightarrow \quad M' = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial G}{\partial B} \right)_{T,N} = \frac{kT}{V} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z_N$$

$$\hookrightarrow \text{gran canónico :} \quad M' = - \left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\tilde{\Omega}}{V} \right) \right]_{T(V),z} = kT \left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\ln Z_\mu}{V} \right) \right]_{T(V),z}$$

$$\tilde{\Omega} = \dots - BM \dots$$

V irrelevante en general

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau

diamagnético : $\chi < 0$

paramagnético : $\chi > 0$

núcleos de una red cristalina : $\mu_{\text{nucl}} \ll \mu_e$ (típicamente 1000 veces más chico)

alineamiento de espines con campo externo $\rightarrow$ **paramagnetismo**

compite con el movimiento orbital
(gas de electrones libres)

campo magnético externo $\rightarrow$ $\mathbf{A}$ (potencial vector)

$$\hookrightarrow \hat{H}_1 = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (\text{no relativista})$$

ec. Schrödinger independiente de t invariante ante transformaciones de gauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla \omega(\mathbf{r}) \qquad \psi(\mathbf{r}) \longrightarrow e^{-\frac{ie}{\hbar c} \omega(\mathbf{r})} \psi(\mathbf{r})$$

$\omega(\mathbf{r})$ cualquier función continua

Gas de Fermi-Dirac: Diamagnetismo de Landau

para $B = B\hat{k}$: autovalores

$$\epsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_o \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad \text{niveles de Landau}$$

$$\omega_o \equiv \frac{eB}{mc} \quad \text{frecuencia ciclotrónica} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad p_z \equiv \hbar k_z$$

osciladores centrados en

$$y_o = \frac{\hbar c}{eB} k_x = \frac{\hbar c}{eB} \frac{2\pi}{L} n_x \quad (\text{material de longitud } L)$$

$$\hookrightarrow y_o \leq L \Rightarrow n_x \leq \frac{eB}{\hbar c} L^2 = g \quad (\text{degeneración} = \text{número de } k_x \text{ permitidos})$$

entonces $B \neq 0$: energías asociadas al movimiento en el plano x - y **dejan de ser continuas**

$$\chi = -\frac{z}{3kT\lambda^3} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \quad (\neq 0) \quad (\text{ejercicio})$$

(¡tomá van Leewen!)

$\chi < 0$: **diamagnético**

Niveles de Landau : efecto de Haas - van Alphen

T bajas : los e^- ocupan los estados de menor energía

disminuye $B \rightarrow$ caben menos en el estado fundamental :

$$\text{degeneración } g = \frac{eB}{hc} L^2$$

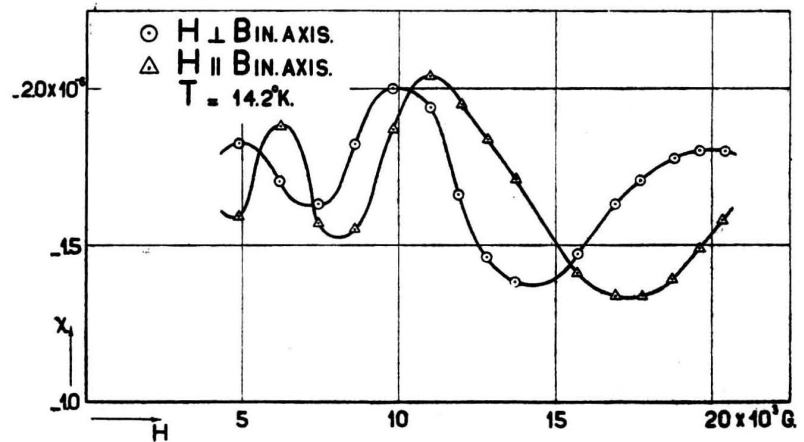
de Haas - van Alphen

experimento (1930)

muestra de Bi a 14,2 K

entre 0,5 y 2 Tesla

oscilaciones en la magnetización



Niveles de Landau : efecto de Haas - van Alphen

$kT \ll \hbar\omega_o$: tomamos directamente $T = 0$ en las expresiones anteriores

(ignoramos el movimiento en z : no aporta)

$$\mu_o \equiv \frac{e\hbar}{2mc} \rightarrow \text{niveles de Landau : } \epsilon_j = 2\mu_o B(j + 1/2)$$

$$\left(n = \frac{N}{L^2}\right) \quad B_o \equiv \frac{nhc}{e} \rightarrow \text{degeneración : } g = \frac{eB}{hc} L^2 = \frac{NB}{B_o}$$

$\hookrightarrow$ **mínimo** B para que todos los e^- quepan en un nivel de Landau

a $T = 0$, si $B > B_o$ todos los e^- en el nivel fundamental ($j = 0$)

$\rightarrow$ energía por partícula : $E_o/N = \mu_o B$

primeros $j+1$ niveles (0 a j) completos , el $(j+1)$ parcialmente lleno y los otros vacíos

$$(j+1)g < N < (j+2)g$$

$$\hookrightarrow (j+1)N \frac{B}{B_o} < N < (j+2)N \frac{B}{B_o} \Rightarrow \frac{1}{j+2} < \frac{B}{B_o} < \frac{1}{j+1}$$

Niveles de Landau : efecto de Haas - van Alphen

$$(j+1)g < N < (j+2)g \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{j+2} < \frac{B}{B_o} < \frac{1}{j+1} \quad (\text{ejercicio})$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{E_o}{N} = \frac{g}{N} \sum_{k=0}^j \epsilon_k + \left[1 - \frac{(j+1)g}{N} \right] \epsilon_{j+1} = \mu_o B \left[2j+3 - (j+1)(j+2) \frac{B}{B_o} \right]$$

$$\frac{E_o}{N}(B) = \begin{cases} \mu_o B_o x & \text{si } x \equiv \frac{B}{B_o} > 1 \\ \mu_o B_o x \left[2j+3 - (j+1)(j+2) x \right] & \text{si } \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1} \end{cases}$$

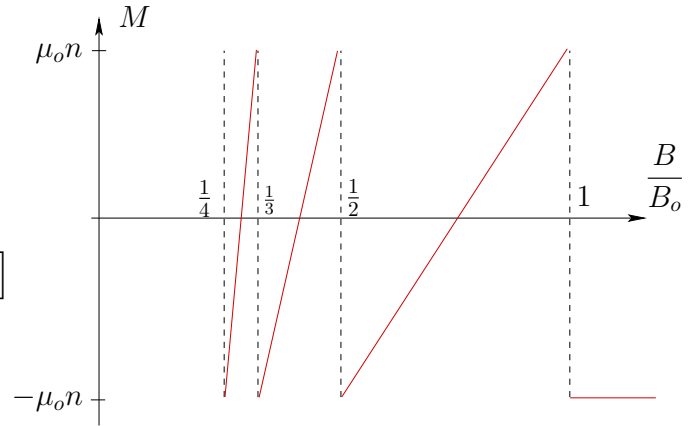
($j = 0, 1, 2, \dots$)

... de donde obtenemos (¿cómo y por qué?)

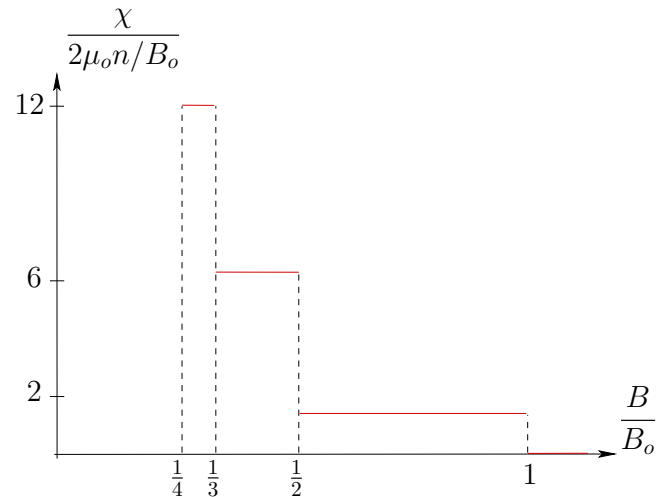
$$\begin{cases} M^> = -\mu_o n \\ M^{(x)} = \mu_o n \left[2(j+1)(j+2) x - (2j+3) \right] \end{cases}$$

Niveles de Landau : efecto de Haas - van Alphen

$$\begin{cases} M^> = -\mu_o n \\ M^{(x)} = \mu_o n [2(j+1)(j+2)x - (2j+3)] \end{cases}$$



$$\begin{cases} \chi^> = 0 \\ \chi^{(x)} = \frac{2\mu_o n}{B_o} (j+1)(j+2) \end{cases}$$



Ferromagnetismo : Modelo de Ising

espines alineados con $B \rightarrow$ *paramagnetismo* ✓

momento magnético orbital predominante $\rightarrow$ *diamagnetismo* ✓

magnetización “espontánea” $\rightarrow$ *ferromagnetismo* ¿?

Fe , Co , Ni

... al calentarse pierden esa propiedad

hamiltoniano de Heisenberg o isotrópico

$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}^x, \hat{\sigma}^y, \hat{\sigma}^z)$ matrices de Pauli

$$\hat{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j - \mu_B \mathbf{B} \cdot \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i$$

c / sitio de la red : 1 espín 1/2

momento magnético $\mu_B \times \hbar$ (magnetón de Bohr)

J_{ij} “integral de intercambio” $\rightarrow$... aprox. : primeros vecinos $\langle ij \rangle$

Ferromagnetismo : Modelo de Ising

$$\hat{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j - \mu_B \mathbf{B} \cdot \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i$$

$J_{ij} > 0$: *ferromagnético*

$J_{ij} < 0$: *antiferromagnético*

solo importa una orientación ($\mathbf{B} = B\hat{k}$) $\rightarrow$ **modelo de Ising** (o *anisotrópico*)

tomando $J_{ij} = J$ (primeros vecinos)

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z - \mu_B B \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^z$$

modelo de Ising originalmente desarrollado para describir ferromagnetismo

se adapta para describir otros cambios de fase :

transiciones orden-desorden (aleaciones) , vidrios de espín , “gas de red” , redes neuronales

Modelo de Ising unidimensional

1D : se simplifica notablemente con condiciones de contorno periódicas ($N+1 \rightarrow 1$)

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_{i+1} - \frac{\mu_B B}{2} \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_{i+1})$$

canónico : operadores $\hat{\sigma}_i$ en el espacio de Hilbert correspondiente autovalores $\sigma_i = \pm 1$

$$Z_N(T, B) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{\beta \sum_{i=1}^N \left[J \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{\mu_B B}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \right]}$$

definiendo el operador $\hat{P}$:

$$\langle \sigma_i | \hat{P} | \sigma_{i+1} \rangle = e^{\beta \left[J \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{\mu_B B}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \right]}$$

(simétrico)

base : $\sigma = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma = -1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+\mu_B B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu_B B)} \end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow Z_N(T, B) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \langle \sigma_1 | \hat{P} | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | \hat{P} | \sigma_3 \rangle \cdots \langle \sigma_N | \hat{P} | \sigma_1 \rangle$$

Modelo de Ising unidimensional

$$Z_N(T, B) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \langle \sigma_1 | \hat{P} | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | \hat{P} | \sigma_3 \rangle \cdots \langle \sigma_N | \hat{P} | \sigma_1 \rangle$$

$$\sum_{\sigma=\pm 1} |\sigma\rangle \langle \sigma| = I \quad \rightarrow \quad Z_N(T, B) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \langle \sigma_1 | \hat{P}^N | \sigma_1 \rangle = \text{Tr}(\hat{P}^N)$$

$$\hat{P} \text{ simétrico} \rightarrow \text{diagonalizable} \rightarrow \text{Tr}(\hat{P}^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N \quad (\lambda_+ > \lambda_-)$$

$$g(T, B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} G(T, B, N) = -k T \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \ln \left[\lambda_+^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right) \right] \right\}$$

$$\hookrightarrow g(T, B) = -k T \ln \lambda_+(B)$$

$$\langle M \rangle = -N \left(\frac{\partial g}{\partial B} \right)_T = \frac{N \mu_B \sinh(\beta \mu_B B)}{\sqrt{e^{-4\beta J} + \sinh^2(\beta \mu_B B)}} \xrightarrow{B \rightarrow 0} 0$$

no hay magnetización espontánea en una dimensión

Modelo de Weiss

modelo de Ising puede resolverse en 2D (funciona)

3D : muuuuuuuuy complicado

... métodos aproximados $\rightarrow$ **método de Weiss** o modelo de **campo molecular**

se reemplaza interacción con γ primeros vecinos por un promedio

$$\hat{H}_W = -\frac{J\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i \langle \sigma \rangle - \mu_B B \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i$$

campo *efectivo* $\frac{J\gamma \langle \sigma \rangle}{2\mu_B}$

!!! espines no interactuantes !!!

$$\hookrightarrow \hat{H}_W = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{J\gamma \langle \sigma \rangle}{2} + \mu_B B \right) \hat{\sigma}_i = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \quad \rightarrow \quad Z_N = Z_1^N$$

$$Z_1 = 2 \cosh \left[\beta \left(\frac{J\gamma \langle \sigma \rangle}{2} + \mu_B B \right) \right]$$

(ejercicio)

$$\hookrightarrow \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z_1} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma e^{-\beta H_1} = \tanh \left[\beta \left(\frac{J\gamma \langle \sigma \rangle}{2} + \mu_B B \right) \right]$$

Modelo de Weiss

$$\langle \sigma \rangle = \tanh \left[\beta \left(\frac{J\gamma \langle \sigma \rangle}{2} + \mu_B B \right) \right]$$

puede tener solución no nula para $B = 0$

(ejercicio: graficar)

predice *temperatura crítica* por encima de la cual solo existen soluciones triviales : $T_c = \frac{J\gamma}{2k}$

para $B = 0$: “ecuación de Curie-Weiss”

$$\langle \sigma \rangle = \tanh \left(\frac{J\gamma}{2kT} \langle \sigma \rangle \right)$$

↙

resolviendo numéricamente ... $m(T) \equiv \mu_B \langle \sigma \rangle (T)$

asíntotas para T bajas : $m/\mu_B \simeq 1 - 2e^{-\frac{J\gamma m}{\mu_B kT}}$

$$\text{y para } T \rightarrow T_c^- : \quad m/\mu_B \simeq \sqrt{3 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)}$$

... *exponentes críticos*