Termodinámica y Mecánica Estadística II

Guía 6 - 29 de octubre de 2021

Problema 1: Describa qué propiedades deben tener las funciones de onda de bosones y fermiones. ¿Qué sistema se describe mediante la estadística de Maxwell-Boltzmann?

Problema 2: Muestre que para un gas de Maxwell-Boltzmann la longitud de onda térmica λ_T es aproximadamente igual a la longitud de onda de de Broglie $h/\langle|\boldsymbol{p}|\rangle$.

Problema 3: <u>Demuestre</u> que las funciones $g_{5/2}(z)$ y $g_{3/2}(z)$ pueden expandirse como una suma de potencias de z.

Problema 4: Para un gas ideal de Bose calcule:

- **a)** la ecuación de estado para la presión;
- **b)** la entropía y verifique la expresión para el calor latente de la transformación, lo que permite convalidar la ecuación de Clausius-Clapeyron;
- **c)** la energía interna por unidad de volumen;
- **d)** el calor específico a volumen constante.

Problema 5: Muestre que en el régimen de altas temperaturas o bajas densidades, es decir, $\lambda^3/v \ll 1$, la ecuación de estado para un sistema de bosones libres tiene la siguiente *expansión virial*:

$$\frac{Pv}{kT} = 1 - \frac{1}{2^{5/2}}\frac{\lambda^3}{gv} + \cdots$$

Problema 6: Muestre que para un gas ideal de Bose la compresibilidad isotérmica diverge cuando el volumen específico se aproxima al volumen específico crítico:

$$\lim_{v\to v_c} \kappa_T \equiv -\lim_{v\to v_c} \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \infty\ .$$

Problema 7: La siguiente expresión es válida cerca de $z = 1$

$$g_{5/2}(z) \ = \ 2,363\,\nu^{3/2} + 1,342 - 2,612\,\nu - 0,730\,\nu^2\ ,$$

donde $\nu = -\ln z$. De esta expresión podemos obtener las correspondientes expansiones para $g_{3/2}$, $g_{1/2}$ y $g_{-1/2}$ usando la relación de recurrencia

$$g_{n-1} = -\frac{\partial g_n}{\partial \nu}$$

Use esto para mostrar que para un gas ideal de Bose la discontinuidad en la derivada del calor específico a la temperatura crítica está dada por

$$\frac{1}{k_B}\left[\left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{T\to T_c^+} - \left(\frac{\partial c_V}{\partial T}\right)_{T\to T_c^-}\right] \ = \ -\frac{3,66}{T_c}\ .$$

Problema 8: Considere un gas ideal de Bose bidimensional:

- **a)** calcule la función gran partición para este sistema;
- **b)** encuentre el número medio de partículas por unidad de área en función de T y z;
- **c)** muestre que no hay condensación de Bose-Einstein en 2 dimensiones.

Problema 9: Un gas ideal de Bose está compuesto por partículas de espín 0 con grados de libertad internos de energía ε_i. Suponga que solo el primer nivel excitado ε_1 resulta accesible además del estado fundamental $\varepsilon_o = 0$.

a) Para una dada temperatura T, encuentre el número medio de partículas en cada uno de los estados individuales accesibles.

b) ¿Qué condiciones debe cumplir el potencial químico μ en este sistema?

c) Para un dado volumen específico v, escriba la ecuación que determina la temperatura de condensación T_c.

d) Verifique que cuando $\varepsilon_1 \to \infty$ se reobtiene el valor de T_c^o esperado.

e) Para valores muy grandes de ε_1 dé una primera corrección a esta temperatura utilizando el valor de T_c^o en la ecuación hallada en el inciso anterior.

Problema 10: Una caja cúbica de volumen V se halla en contacto con un reservorio de bosones idénticos sin espín, de masa m y a temperatura T.

a) Escriba una expresión para el número de bosones $\mathrm{d}n(\epsilon)$ con energías entre ϵ y $\epsilon + \mathrm{d}\epsilon$ en función de ϵ, m, T y el potencial químico.

b) Para el caso en que $\exp(\beta\mu) \ll 1$ (gas diluido), muestre que el potencial químico es aproximadamente igual al del gas de Boltzmann. Muestre también que en esta situación la distancia media ℓ entre partículas es mucho mayor que la longitud de onda de de Broglie.

c) Para el caso en que $\mu = 0$, calcule la densidad de energía y la capacidad calorífica del sistema.

Problema 11: Para un gas de fotones ($m = 0$ y $\mu = 0$) a temperatura T,

a) encuentre la densidad de estados de energía y la densidad de energía;

b) encuentre la presión del gas.

Problema complementario: *Bosones ideales en una trampa armónica.* Los estados energéticos de los bosones están dados por

$$\epsilon_{\boldsymbol{a}} = \hbar\omega \left(a_x + a_y + a_z + \frac{3}{2} \right) ,$$

incluyendo la energía de punto cero $\epsilon_0 = 3\hbar\omega/2$; los números de ocupación del estado con energía $\epsilon_{\boldsymbol{a}}$ están dados por $n_{\boldsymbol{a}}$, donde $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ con $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

a) Calcule el gran potencial Ω considerando que $0 < ze^{-\beta\epsilon_{\boldsymbol{a}}} < 1$, la expansión en serie $\ln(1 + x) = -\sum_{\ell=1}^{\infty} \left[(-x)^\ell/\ell\right]$, válida para $-1 < x \leq 1$ y temperaturas relativamente altas, tales que se pueda aproximar $1 - \exp(-\ell\beta\hbar\omega) \approx \ell\beta\hbar\omega$ para los valores de ℓ relevantes. En particular muestre que

$$\Omega \propto g_4 \left(ze^{-\beta\epsilon_0} \right) ,$$

donde $g_s(z)$ está definida como

$$g_s(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^s} .$$

b) Dé una expresión para la energía interna U y el número medio de partículas $\langle N \rangle$. Obtenga U en términos de $\langle N \rangle$.

c) Calcule el calor específico c (para un *número constante de partículas*). Use el desplazamiento cuadrático medio del oscilador armónico $r_{\text{ef}}^2 = x_o^2 \langle a_x + a_y + a_z \rangle$ para definir un volumen efectivo $V_{\text{ef}} = (4\pi/3) r_{\text{ef}}^3$ y calcule el coeficiente de expansión térmica α.

d) Analice la posibilidad de que ocurra una condensación de Bose-Einstein en este sistema.