Termodinámica y Mecánica Estadística II

Guía 7 - 11 de noviembre de 2021

Problema 1: Derive la densidad de estados de energía para un gas de electrones en una dimensión. Suponga que el sistema está compuesto por N electrones confinados en una línea de longitud L. Calcule la energía de Fermi.

Problema 2: Los electrones de conducción de un metal pueden ser considerados como un gas de electrones libres (en 3D).

a) Obtenga la densidad de estados de energía y la energía de Fermi.

b) Dé una expresión para la densidad de electrones en función de la longitud de onda térmica y el potencial químico.

c) Calcule la temperatura de Fermi para los electrones de conducción en aluminio, cobre y platino.

Problema 3: Siguiendo el método de Sommerfeld, muestre que a bajas temperaturas la energía interna de un gas de fermiones libres con energía de Fermi ϵ_F puede aproximarse como

$$U = \frac{3}{5} \langle N \rangle \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \cdots \right] .$$

Problema 4: Verifique que para un gas de fermiones libres (3D) con impulso de Fermi p_F se cumple

$$\sum_{|\boldsymbol{p}|<p_F} \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{5} \langle N \rangle \epsilon_F .$$

Problema 5: Muestre que, a bajas temperaturas, para un gas ideal de Fermi la energía libre de Helmholtz por partícula está dada por

$$f \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{F}{N} \;=\; \frac{3}{5} \epsilon_F \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \cdots \right] .$$

Problema 6: a) Encuentre la población media de niveles $\langle n_{\boldsymbol{p}} \rangle$ y la ecuación de estado para un gas ideal de Bose y para un gas ideal de Fermi a altas temperaturas. Incluya la primera corrección debida a efectos cuánticos y compare con el problema de *gas imperfecto*.

b) Muestre que en el régimen de altas temperaturas o bajas densidades, es decir, $\lambda^3/v \ll 1$, la ecuación de estado para un sistema de fermiones libres tiene la siguiente expansión virial:

$$\frac{Pv}{kT} = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{gv} + \cdots$$

¿Cuál es la diferencia con un gas de bosones en este régimen? Interprete.

Problema 7: Un modelo simplificado para un semiconductor intrínseco consiste en considerar un sistema de dos niveles, correspondientes a las bandas de valencia y conducción respectivamente. Las energías respectivas son ϵ_1 y ϵ_2 ($> \epsilon_1$), con la misma degeneración g en ambos niveles. Cuando el sistema cuenta con N electrones, todos están en la banda de valencia a T=0 K. La característica de semiconductor se introduce imponiendo $N = g$.

a) Determine las poblaciones respectivas N_1 y N_2 en los niveles ϵ_1 y ϵ_2 a temperatura T.

b) Calcule el potencial químico en función de la temperatura. ¿Cuánto vale la energía de Fermi?

c) Exprese N_1 y N_2 en función de g, kT y $\Delta\epsilon \equiv \epsilon_2 - \epsilon_1$. Determine P_1 y P_2, el número de "huecos" o estados vacíos en cada banda. Analice los límites para altas y bajas temperaturas.

Problema 8: Un cilindro está separado en dos compartimentos por un pistón móvil. En uno de los compartimentos se coloca un gas ideal de Fermi de partículas de espín $1/2$, mientras que en el otro, un gas ideal de Fermi de partículas de espín $3/2$. Todas las partículas tienen igual masa. Encuentre la densidad relativa de equilibrio a $T=0$ y $T\to\infty$.

Problema 9: *Diamagnetismo de Landau.* Una partícula sin espín y carga $-e$ es puesta en presencia de un campo magnético H constante en la dirección z. Elija el gauge en que el Hamiltoniano toma la forma

$$\mathcal{H} \;=\; \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{eHy}{c}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2\right]$$

y calcule los niveles de energía (niveles de Landau).

Suponga que la temperatura es suficientemente alta como para tratar el gas de electrones usando la estadística de Boltzmann y calcule la susceptibilidad magnética.

Problema 10: *Efecto de Haas - van Alphen.* Para el sistema descripto en el problema anterior, en el límite de bajas temperaturas y campo fuerte ($kT \ll \hbar eB/mc$) aparecen términos oscilatorios en la susceptibilidad magnética. Calcule esos términos.

Problema 11: Considere un gas de electrones bidimensional en presencia de un campo magnético suficientemente fuerte como para que todas las partículas estén en el nivel de Landau más bajo. Calcule la magnetización a $T = 0$ teniendo en cuenta el espín del electrón.

Problema complementario: *Fermiones ideales en una trampa armónica.* Considere un gas de electrones cuyos estados energéticos están dados por

$$\epsilon_{\boldsymbol{a}} = \hbar\omega(a_x + a_y + a_z),$$

donde $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, con $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

a) Calcule el gran potencial Ω considerando que $0 < z\exp(-\beta\epsilon_{\boldsymbol{a}}) < 1$, la expansión en serie $\ln(1+x) = -\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[(-x)^{\ell}/\ell\right]$, válida para $-1 < x \leq 1$ y temperaturas relativamente altas, tales que se pueda aproximar $1 - \exp(-\ell\beta\hbar\omega) \approx \ell\beta\hbar\omega$ para los valores de ℓ relevantes. En particular muestre que

$$\Omega = -\frac{2}{(\hbar\omega)^3\beta^4}\, f_4(z)\ ,$$

donde $f_s(z)$ está definida como:

$$f_s(z) = -\sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\frac{z^{\ell}}{\ell^s}\ .$$

b) Dé una expresión para la energía interna U y el número medio de partículas $\langle N\rangle$. Obtenga U en términos de $\langle N\rangle$.
Ayuda: Introduzca el parámetro $\rho = (\hbar\omega\beta)^3\langle N\rangle/2$ y encuentre una relación $\rho(z)$ considerando las mismas aproximaciones que en el punto anterior. En general, tome hasta segundo orden en todos los desarrollos que considere.

c) Calcule el calor específico c para un *número constante de partículas.*

d) Compare los resultados obtenidos para U y c con los correspondientes para un gas de Boltzmann. Para temperaturas relativamente altas, ¿de qué orden en T son las correcciones debidas a la cuántica? ¿La corrección es positiva o negativa? Explique.