Guías de Ejercicios de Análisis Matemático III

Docentes

Nombre	Ubicación	contacto
Dra. Marta Urciuolo	FaMAF, of. 270, int. 270	urciuolo@mate.uncor.edu
Dr. Adolfo Banchio	FaMAF, of. 216, int 216	banchio@famaf.unc.edu.ar
Dra. Isabel Dotti	FaMAF, of. 305, int 305	idotti@mate.uncor.edu
Dra. Sofía Paczka	FaMAF, of. 316, int 316	paczka@mate.uncor.edu
Dr. Elvio A. Pilotta	FaMAF, of. 314, int 314	pilotta@famaf.unc.edu.ar

Horarios

Clases teóricas: Martes y Viernes, 14:00 a 16:00 hs., Aula 17 (FaMAF).

Clases prácticas:

- Lic. en Matemática, Astronomía y Física: Martes de 16:00 a 18:00 hs., Aula 13 (FaMAF) y Viernes de 16:00 a 18:00 hs., Aula 17 (FaMAF);
- Profesorado en Matemática: Miércoles de 14:00 a 16:00 hs., Aula 10 (FaMAF) y Viernes de 16:00 a 18:00 hs., Aula 17 (FaMAF).

Condiciones de regularidad

Se tomarán 3 (tres) parciales durante el cuatrimestre. Para obtener la condición de *ALUMNO REGULAR* se deben cumplir los siguientes requisitos:

- Aprobar 2 (dos) de los 3 (tres) parciales.
- Tener el 80 % de asistencia a las clases prácticas.

Fechas importantes

Fechas (tentativas) de los parciales	
evaluación	fecha
Parcial 1	3 de Abril de 2009.
Parcial 2	22 de Mayo de 2009.
Parcial 3	19 de Junio de 2009.

Observación.

En estas guías hay tres niveles de ejercicios:

►►► **1.** Es altamente recomendable terminar estos ejercicios durante las clases prácticas.

▷ ►► **2.** Estos ejercicios son práctica adicional para los parciales. El nivel de complejidad es similar al del primer grupo.

▷ ▷ ► **3.** Ejercicios de dificultad un poco más elevada.

★★★ **4.** Los ejercicios con esta marca son importantes para afianzar conceptos. Es recomendable tener bien claros estos ejercicios antes de proseguir.

Temario

1. PRÁCTICO 1: GRÁFICOS: RECTAS, PLANOS Y SUPERFICIES. Gráficas de funciones y sus ecuaciones en formas canónica, paramétrica e implícita. Cónicas.

2. PRÁCTICO 2: CURVAS EN EL ESPACIO. Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Dominio e imagen de funciones reales. Longitud de curvas. Parametrización de curvas. Vectores tangente y normal. Curvatura.

3. PRÁCTICO 3: COORDENADAS Y SUPERFICIES EN EL ESPACIO. Coordenadas cilíndricas y esféricas. Dominio e imagen. Gráficas, curvas de nivel y superficies de nivel. Representación de sólidos.

4. PRÁCTICO 4: LÍMITE Y CONTINUIDAD. Cálculo de límites y estudio de continuidad de funciones de varias variables.

5. PRÁCTICO 5: DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIABILIDAD. Planos tangentes. Concepto de diferenciabilidad. Gradiente. Regla de la cadena. Derivadas direccionales.

6. PRÁCTICO 6: FUNCIONES INVERSAS E IMPLÍCITAS. Condiciones necesarias para definir funciones implícitas e inversas.

7. PRÁCTICO 7: DESARROLLOS DE TAYLOR. Definición. Polinomios de Taylor.

8. PRÁCTICO 8: PUNTOS CRÍTICOS DE FUNCIONES. Máximos y mínimos locales y globales. Método de los multiplicadores de Lagrange.

9. PRÁCTICO 9: INTEGRALES DE FUNCIONES REALES. Suma de Riemann. Orden de integración. Cambio de coordenadas. Cambio de variables. Integrales de línea.

10. PRÁCTICO 10: CAMPOS VECTORIALES. Definición. Campos conservativos. Independencia de la trayectoria. Rotor y divergencia. Teoremas de Green, Stokes y de la divergencia.

PRÁCTICO 1: GRÁFICOS: RECTAS, PLANOS Y SUPERFICIES

☐ **Definición:** RECTA
Sean $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ vectores fijos de $\mathbb{R}^n$. Definimos la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ y generada por $\mathbf{x}_1$, al conjunto

$$L_0 = \{\mathbf{z} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1 : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{(Ecuación vectorial o paramétrica de la recta)}$$

Decimos que dos rectas son paralelas si sus generadores lo son, i.e., L_0 es paralela a $L = \{\mathbf{y}_0 + t\mathbf{y}_1 : t \in \mathbb{R}\}$ si $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{y}_1$ son vectores paralelos. (Si $\mathbf{x}_0 \neq 0$, ¿asegura esto que la recta L_0 no pasa por el origen?)

☐ **Definición:** PLANO
Sean $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, y $\mathbf{x}_2$ vectores no paralelos de $\mathbb{R}^3$. Se llama plano que pasa por $\mathbf{x}_0$, generado por $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, al conjunto

$$P_0 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 : s, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{(ecuación vectorial o paramétrica del plano } P_0\text{).}$$

►►► **1.** Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:

(a) Que pasa por $(-3, 0, 2)$ y es paralela a $(0, 3, -2)$.

(b) Que pasa por los puntos $(-1, 5, 4)$ y $(0, 3, -2)$.

(c) Definida por $x = 3t + 1$, $y = 5t - 2$, $z = 2t + 1$.

(d) Que pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

(e) Que pasa por $(1, 3)$ y es paralela a la que pasa por $(-1, 4)$ y $(3, -2)$

►►► **2.** Dar la ecuación vectorial de los siguientes planos:

(a) Generado por $(-1, 0, 4)$, $(2, 3, -10)$ y que contiene al punto $(2, 3, -5)$.

(b) Generado por $(-1, 0, 4)$, $(2, 3, -10)$ y que pasa por $(3, -3, 6)$. ¿Pasa este plano por el origen?

(c) Que pasa por $(1, -1, 0)$, $(1, 2, 1)$, y $(0, 1, 1)$.

►►► **3.** Graficar los siguientes conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1\}$ (elipse)

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x - 1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{2} = 8\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - (y - 1)^2 = 1\}$ (hipérbola)

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 - \dfrac{(y+1)^2}{2} = 1\}$

▶▶▶ **4.** Sea P el plano generado por $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y que pasa por $\mathbf{x_0}$, y sea $\mathbf{N}$ un vector ortogonal a $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

(a) Probar que $\mathbf{x} \in P \iff (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$ (Ecuación Normal del plano).

(b) Dar la ecuación normal del plano definido por:

$$\mathbf{y} = t(1,2,0) + s(2,0,1) + (1,0,0) \text{ con } t, s, \in \mathbb{R}$$

(c) Dar la ecuación normal del plano que pasa por $(1,-1,1)$, $(-2,0,1)$, y $(-1,1,1)$

(d) Dar la ecuación vectorial del plano con ecuación $2x + 3y + z = 1$

□ **Definiciones:** Ecuaciones de las cónicas

Una **parábola** es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto (foco) y de una recta (directriz). Si el foco es el punto $(0,p)$ y la directriz es la recta $y = -p$:

$$x^2 = 4py$$

Una **elipse** es el conjunto de puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es constante:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La **hipérbola** es el conjunto de puntos en el plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es constante:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□ **Definiciones:** Ecuaciones de las cuádricas

Un **elipsoide** está dado por el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Un **cono** está dado por el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Un **paraboloide** está dado el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen:

$$z = x^2 + y^2$$

El **cilindro** es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que equidistan de una recta, por ejemplo:

$$cte = x^2 + y^2$$

Un **hiperboloide** es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisface

$$z^2 = x^2 + y^2 + a;$$

con $a \neq 0$.

▷▶▶ **5.** Usar las definiciones para deducir las ecuaciones de las cónicas.

▶▶▶ **6.** Reduzca la ecuación a una de las formas canónicas, clasifique la superficie y trace su gráfica:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y = 3$

(b) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 8y = 0$

(c) $4x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 8y = 0$

(d) $z^2 = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4z$

(e) $\frac{z^2}{4} - y^2 = 1$

►►► **7.** Relacione la ecuación con su gráfica. Dé argumentos para su elección.

(a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

(b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

(c) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

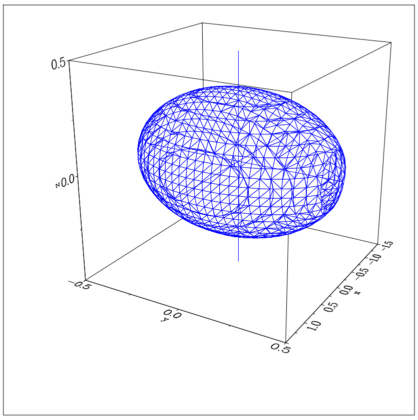
(d) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

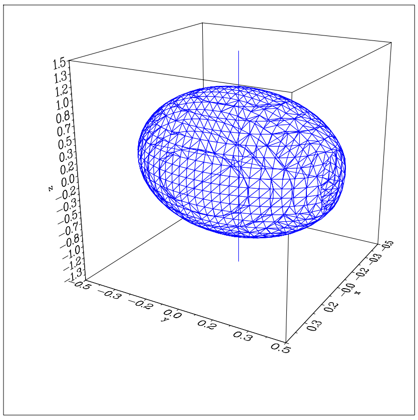
(e) $y = 2x^2 + z^2$

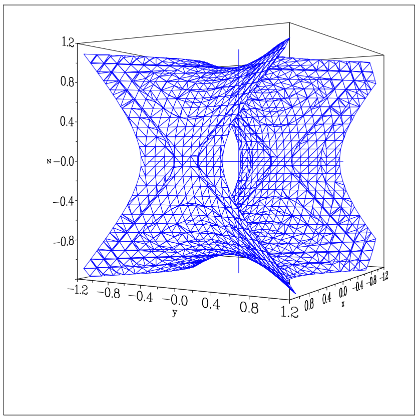
(f) $y^2 = x^2 + 2z^2$

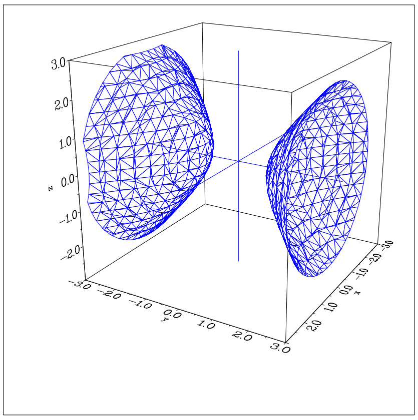
(g) $x^2 + 2z^2 = 1$

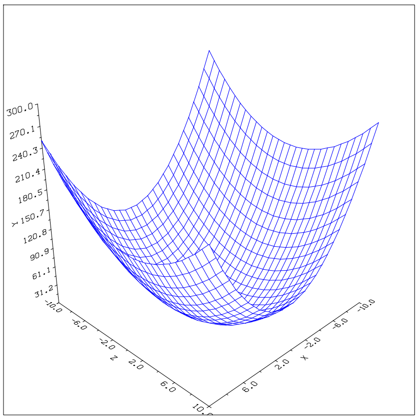
(h) $y = x^2 - z^2$

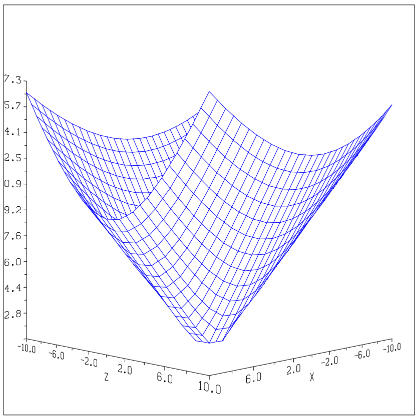


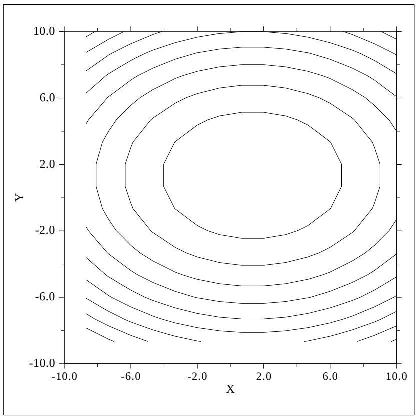


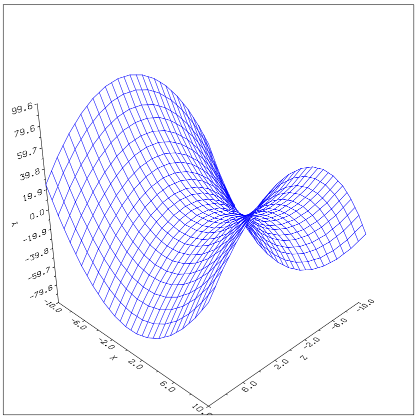












►►► **8.** Encuentre los vértices y focos de la cónica dada y trace su gráfica. En el caso de una hipérbola, determine las asíntotas.

(a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ (b) $25x^2+9y^2=1$ (c) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$

(d) $-x^2+9y^2=9$ (e) $2y^2-3x^2+12x-4y+8=0$ (g) $x^2+2y^2-6x+4y=0$

►►► **9.** Encuentre las trazas de la superficie dada en los planos $x=k$, $y=k$, $z=k$, identifique la superficie y trace su gráfica:

(a) $x^2+y^2+z^2=9$
(b) $4x^2+9y^2+z^2=36$
(c) $\frac{x^2}{4}-y^2+\frac{z^2}{9}=1$
(d) $\frac{x^2}{4}-y^2-\frac{z^2}{9}=1$
(e) $x^2+y^2-z^2=0$
(f) $4x^2-y^2+25z^2=0$
(g) $\frac{x^2}{9}+y^2=z$
(h) $3y^2+12z^2=16x$
(i) $-x^2+y^2-z=0$
(j) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{36}=4$
(k) $x^2=y+z$
(l) $x^2-y^2=0$

►►► **10.** Encuentre la ecuación de la superficie que consta de todos los puntos $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ para los cuales la distancia de $\mathbf{x}$ al eje x es el doble de la distancia de $\mathbf{x}$ al plano yz. Identifique la superficie.

▷▷► **11.** Hallar el valor de k para el cual la intersección del plano $x+ky=1$ con el hiperboloide $y^2-x^2-z^2=1$ es una elipse en el plano yz.

►►► **12.** Hallar la ecuación de la curva intersección del plano $x+2y+z=0$ con el cilindro $x^2+y^2=4$.

PRÁCTICO 2: CURVAS EN EL ESPACIO.

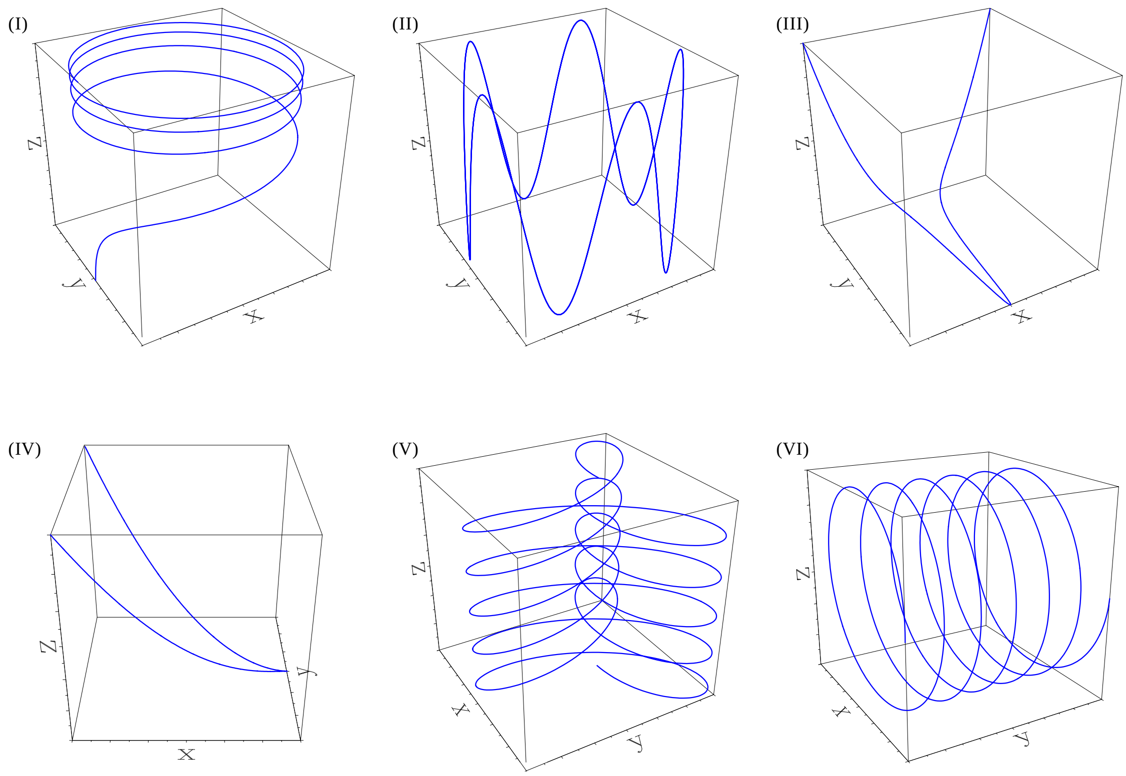
☐ **Definición:** ECUACIONES DE CURVAS

Si $a, b \in \mathbb{R}$, la representación paramétrica de una curva en $\mathbb{R}^3$ esta dada por $\mathbf{r} = (x, y, z)$, con:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t); \quad a \leq t \leq b$$

►►► **1.** Relacione las ecuaciones paramétricas con las gráficas. Dé argumentos para su elección.

(a) $x = \cos(t), \quad y = t, \quad z = \operatorname{sen}(t)$
(b) $x = t^2 - 2, \quad y = t^3, \quad z = t^4 + 1$
(c) $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2$
(d) $x = \operatorname{sen}(3t)\cos(t), \quad y = \operatorname{sen}(3t)\operatorname{sen}(t), \quad z = t$
(e) $x = \cos(t), \quad y = \operatorname{sen}(t), \quad z = \operatorname{sen}(5t)$
(f) $x = \cos(t), \quad y = \operatorname{sen}(t), \quad z = \ln(t)$



►►► **2.** Dibuje la curva con la ecuación vectorial dada. Indique con una flecha la dirección en la que t se incrementa.

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, -t, 2t)$
(b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t, 2)$
(c) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen}(t), 3, \cos(t))$
(d) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen}(t), t, \cos(t))$
(e) $\mathbf{r}(t) = (t^4 + 1)\hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{k}}$
(f) $\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}} + \cos(t)\hat{\mathbf{k}}$
(g) $\mathbf{r}(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} + t^4\hat{\mathbf{j}} + t^6\hat{\mathbf{k}}$
(h) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t))$.

▶▶▶ **3.** Muestre que la curva con ecuación paramétrica $x = t\cos(t), y = t\,\mathrm{sen}(t), z = t$ está en el cono $z^2 = x^2 + y^2$, y utilice este hecho para ayudarse en el dibujo de la curva.

▶▶▶ **4.** Encuentre el límite:

(a) $\lim_{t\to 0}\Big(t, \cos(t), 2\Big)$

(b) $\lim_{t\to 0}\Big(\frac{t-\cos(t)}{t}, t^3, e^{-1/t^2}\Big)$

(c) $\lim_{t\to 0}\Big(\sqrt{t+3}, \frac{t-1}{t^2-1}, \frac{\tan(t)}{t}\Big)$

(d) $\lim_{t\to 0}\Big(e^{-t}, \frac{t-1}{t+1}, \arctan(t)\Big)$

▶▶▶ **5.** Determine el dominio y la derivada de la función vectorial dada,

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$

(b) $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4, \sqrt{t-4}, \sqrt{6-t})$

(c) $\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{i}} + \tan(t)\hat{\mathbf{j}} + \sec(t)\hat{\mathbf{k}}$

(d) $\mathbf{r}(t) = te^{2t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{t-1}{t+1}\hat{\mathbf{j}} + \arctan(t)\hat{\mathbf{k}}$

(e) $\mathbf{r}(t) = \ln(4-t^2)\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{1+t}\hat{\mathbf{j}} - 4e^{3t}\hat{\mathbf{k}}$

(f) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

(g) $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos(t)\hat{\mathbf{i}} + e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)\hat{\mathbf{j}} - \ln|t|\hat{\mathbf{k}}$

(h) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\mathbf{c})$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$.

▶▶▶ **6.** Dibuje la curva plana con la ecuación vectorial dada, calcule $\mathbf{r}'(t)$ y dibuje el vector posición $\mathbf{r}(t)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ para el valor dado de t.

(a) $(\cos(t), \mathrm{sen}(t)), \quad t = \pi/4$

(b) $(t^3, t^2), \quad t = 1$

(c) $(1+t)\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}}, \quad t = 1$

▶▶▶ **7.** Determine las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva con las ecuaciones paramétricas dadas, en el punto especificado:

(a) $x = t, \quad y = \sqrt{2}\cos(t), \quad z = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), \quad \mathbf{r} = (\pi/4, 1, 1)$

(b) $x = \cos(t), \quad y = 3e^{2t}, \quad z = 3e^{-2t}, \quad \mathbf{r} = (1, 3, 3)$

▶▶▶ **8.** Las curvas $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, t^3)$ y $\mathbf{r}_2(t) = (\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(2t), t)$ se intersecan en el origen. Determine su ángulo de intersección.

▶▶▶ **9.** Sea $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ para $0 \leq t \leq 1$.

(a) Hacer un dibujo de la curva que describe $\mathbf{r}$ y de la recta tangente en $(1/2, 1/4, 1/8)$.

(b) Encuentre $|\mathbf{r}'(t)|$.

(c) Si consideramos a $\mathbf{r}$ definida en todos los reales calcular todos los t para los cuales la recta tangente a la curva en $\mathbf{r}(t)$ es paralela al vector $(4, 4, 3)$. ¿Hay algún punto t para el cual la recta tangente a la curva en $\mathbf{r}(t)$ es perpendicular al vector $(4, 4, 3)$?

▶▶▶ **10.** Si $\mathbf{r}(t) \neq 0$, muestre que $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)$

▶▶▶ **11.** Si una curva tiene la propiedad de que el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ es siempre perpendicular al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$, pruebe que la curva está en una esfera con centro en el origen.

★★★ **12.** Supongamos que una curva está parametrizada por dos funciones continuamente diferenciables $\mathbf{r}_1(t),\ a \le t \le b$ y $\mathbf{r}_2(s),\ \alpha \le s \le \beta$. Estas funciones se llaman parametrizaciones equivalentes si existe una función continuamente diferenciable φ tal que

$$a = \varphi(\alpha) \text{ y } b = \varphi(\beta),$$
$$\mathbf{r}_1(\varphi(s)) = \mathbf{r}_2(s), \qquad \alpha \le s \le \beta,$$
$$\varphi'(s) > 0, \qquad \alpha < s < \beta.$$

(a) Muestre que parametrizaciones equivalentes asignan la misma longitud a la curva.

(b) Muestre que

$$(x, y) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \quad 0 \le t \le \pi/2 \text{ y } (x, y) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2}\right), \quad 0 \le s \le 1$$

son parametrizaciones equivalentes de un cuarto de círculo.

▶▶▶ **13.** Muestre que la curva $(x, y) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s)),\ 0 \le s \le 2\pi$ está parametrizada por longitud de arco.

▷▷▶ **14.** Sea $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva continuamente diferenciable. Pruebe que $\left\| \int_a^b \mathbf{r}(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|\mathbf{r}(t)\|\, dt$. Sean $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{q} = \mathbf{r}(b)$ los extremos de la curva. Pruebe que $l(\mathbf{r}) \ge \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$, y por lo tanto la curva más corta que une dos puntos es el segmento.

▶▶▶ **15.** Encontrar la longitud de las siguientes curvas:

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, \ln(\cos(t)))$ con $0 \le t \le 1$

(b) $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t\right)$ con $0 \le t \le 2$

(c) $\mathbf{r}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4)$ con $-1 \le t \le 2$

(d) $y = x^{2/3}$ con $0 \le x \le 5$

▶▶▶ **16.** Reparametrice las siguientes curvas con respecto a la longitud de arco a partir de $t = 0$.

(a) $\mathbf{r}(t) = (e^t \operatorname{sen}(t), e^t \cos(t))$

(b) $\mathbf{r}(t) = (3 \operatorname{sen}(t), 4t, 3\cos(t))$.

▶▶▶ **17.** Encuentre los vectores tangente unitario y normal unitario $T(t)$ y $N(t)$ de las siguientes curvas. Calcule sus curvaturas.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen}(4t), 3t, \cos(4t))$

(b) $\mathbf{r}(t) = (6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3)$

(c) $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t))$

(d) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, \ln(t))$

►►► **18.** ¿En qué punto tiene la curva $y = e^x$ su máxima curvatura?

☐ **Definición:** Círculo osculante

El círculo osculante a una curva C en un punto dado P es el círculo que posee la misma recta tangente y la misma curvatura que C en el punto P. Este círculo es el que mejor se aproxima a la curva en P. El radio R de dicho círculo se denomina el *radio de curvatura* y está dado por $R = 1/\kappa$, donde κ es la curvatura de C en P.

►►► **19.** Encuentre las ecuaciones de los círculos osculantes de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ en los puntos $(0,0)$ y $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Grafique la parábola y los círculos osculantes.

►►► **20.** Encuentre la velocidad, la aceleración y la rapidez de una partícula con función posición dada. Dibuje la trayectoria de la partícula y los vectores aceleración y velocidad a partir de los valores dados de t.

(a) $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t), \qquad t = 1$

(b) $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t}, 1 - t), \qquad t = 1$

(c) $\mathbf{r}(t) = e^t\,\hat{\mathbf{i}} + e^{-t}\,\hat{\mathbf{j}}, \qquad t = 0$

(d) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}(t)\,\hat{\mathbf{i}} + 2\cos(t)\,\hat{\mathbf{j}}, \ t = \frac{\pi}{6}$

(e) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}(t)\,\hat{\mathbf{i}} + t\,\hat{\mathbf{j}} + \cos(t)\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad t = 0$

(f) $\mathbf{r}(t) = t\,\hat{\mathbf{i}} + t^2\,\hat{\mathbf{j}} + t^3\,\hat{\mathbf{k}}, \qquad t = 1$

►►► **21.** Se lanza un proyectil con una velocidad inicial de $500\,m/s$ y un ángulo de elevación de $30°$. Determine el alcance del proyectil, la altura máxima alcanzada y la rapidez en el momento del impacto.

PRÁCTICO 3: Coordenadas y superficies en el espacio

►►► **1.** Identifique las superficies dadas por las siguientes ecuaciones.

(a) $r = 3$ (b) $\rho = 3$ (c) $\phi = \frac{\pi}{3}$
(d) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (e) $z = r^2$ (f) $r = 4 \operatorname{sen} \theta$
(g) $\rho \operatorname{sen} \phi = 2$ (h) $r = 2 \cos \theta$ (i) $\rho = 2 \cos \phi$
(j) $r^2 - 2z^2 = 4$ (k) $\rho^2 (\operatorname{sen}^2 \phi - 4 \cos^2 \phi) = 1$

►►► **2.** Escriba la ecuación en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

(a) $x^2 + y^2 - z^2 = 16$ (b) $x^2 + y^2 = 2z$
(c) $y^2 + z^2 = 1$ (d) $z = x^2 - y^2$

►►► **3.** Dibuje el sólido que describen las siguientes desigualdades.

(a) $r^2 \leq z \leq 2 - r^2$ (b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad r \leq z \leq 2$
(c) $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \quad \rho \leq 2$

►►► **4.** Determine y dibuje el dominio y la imagen (o contradominio) de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = e^{x^2 - y}$ (b) $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$
(c) $f(x, y, z) = x^2 \ln(x - y + z)$ (d) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$
(e) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (f) $f(x, y) = \ln(xy - 1)$
(g) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

►►► **5.** Trace las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ (b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)$
(c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ (d) $f(x, y) = x^2 - y^2$
(e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (f) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

►►► **6.** Dibuje un mapa de contorno de la función dada mostrando varias curvas de nivel:

(a) $f(x, y) = xy$ (b) $f(x, y) = y - \cos(x)$
(c) $f(x, y) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$

►►► **7.** Describa las superficies de nivel de las funciones dadas:

(a) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$ (b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
(c) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

Las curvas de nivel son ampliamente usadas en diferentes campos de la física y la tecnología. He aquí un ejemplo. Piense al menos 3 ejemplos más.

►►► **8.** Una placa metálica delgada, localizada en el plano xy, tiene temperatura $T(x, y)$ en el punto (x, y). Las curvas de nivel de T se llaman isotermas porque en todos los puntos de una de estas curvas la temperatura es la misma. Dibujar algunas isotermas si la función temperatura está dada por $T(x, y) = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$

PRÁCTICO 4: Límite y Continuidad.

►►► **1.** Demuestre las siguientes desigualdades:

(a) $||(x_1,\ldots,x_n)|| \leq \sqrt{n}\,\text{máx}\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$,

(b) $||(x_1,\ldots,x_n)|| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$,

(c) $||(x_1,\ldots,x_n)|| \geq |x_i| \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$.

►►► **2.** Demostrar, usando la definición, que:

(a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x+y^2) = 5$,

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$,

(c) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x+y = x_0+y_0$,

(d) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = x_0y_0$.

►►► **3.** Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3+x^3y^2-5}{2-xy}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^4+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{|x|+|y|}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^3}{y^4+x^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$

►►► **4.**

(a) Sea $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i-ésima proyección ortogonal; esto es, $p_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$. Pruebe por definición que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} p_i(\mathbf{x}) = a_i$. Si $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función constante $c(\mathbf{x}) = c$ para todo $\mathbf{x}$, pruebe que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} c(\mathbf{x}) = c$.

(b) Deduzca que toda función polinomial de n variables es continua.

►►► **5.**

(a) Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ y $|g(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x})$ para todo $0 < |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < r$, demuestre que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$.

(b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $f(\mathbf{a})$, demuestre que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(f(\mathbf{x})) = h(l)$.

►►► **6.** Demuestre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

★★★ **7.** Determine el dominio y el conjunto de puntos en los cuales son continuas las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}+y & \text{si } x\neq 0\\ 1+y & \text{si } x=0\end{cases}$

(d) $f(x,y)=\ln(x+y)$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(f) $f(x,y,z)=x+y\sqrt{x+z}$

(g) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0\\ 0 & \text{si } x+y=0\end{cases}$

(h) $f(\mathbf{x})=\dfrac{|\mathbf{x}|}{1-|\mathbf{x}|^2}$

(i) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$,

▶▶▶ **8.** Estudiar el límite y la continuidad en el origen de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0),\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases}x^2/y & \text{si } y>0\wedge x^2/y\leq 1\\ y/x^2 & \text{si } y>0\wedge x^2/y\geq 1\\ f(x,-y) & \text{si } y<0\\ 0 & \text{si } x=0 \text{ ó } y=0,\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\{(y-x^2)(y-2x^2)\} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

donde $\operatorname{sgn}(t)=1$ si $t\geq 0$ y $\operatorname{sgn}(t)=-1$ si $t<0$.

▶▶▶ **9.** Determine para qué valores de r la función

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^3$.

PRÁCTICO 5: Derivadas parciales y Diferenciabilidad.

▶▶▶ **1.** Encuentre las derivadas parciales de primer orden de:

(a) $f(x,y) = x^2 + x\,\text{sen}(x+y)$

(b) $f(x,y) = \text{sen}(x)\cos(x+y)$

(c) $f(x,y) = x^y$

(d) $f(x,y) = \arctan(y/x)$

(e) $f(x,y) = \int_y^x \frac{e^t}{t}\,dt$

(f) $f(x,y) = \log_x(y)$

(g) $f(x,y,z,w) = \frac{x^2-y^2}{z^2+w^2}$

(h) $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$

(i) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$

▶▶▶ **2.** Verifique que $f_{xy} = f_{yx}$ para las siguientes funciones:

$f(x,y) = xy + x^2y^3, \qquad f(x,y) = 1/(x^2+y^2), \qquad f(x,y) = \text{arc sen}(xy^2).$

▶▶▶ **3.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = (|\mathbf{x}|)^{-(n-2)}$. Demuestre que $\Delta f = 0$, donde $\Delta f = f_{x_1x_1} + \cdots + f_{x_nx_n}$.

▶▶▶ **4.** Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que $f_{xy}(0,0) = -1$ y $f_{yx}(0,0) = 1$. ¿Contradice esto el teorema que asegura que las derivadas cruzadas coinciden?

★★★ **5.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ existen para todo $1 \leq i \leq n$.

Demuestre que f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} = 0.$$

★★★ **6.** Demuestre que si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$. ¿Vale la recíproca?

▶▶▶ **7.** ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ son diferenciables las siguientes funciones? ¿Por qué?

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ (b) $g(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$ (c) $f(u,v) = |u+v|$

▶▶▶ **8.** Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si } x \neq \pm y \\ 0 & \text{si } x = \pm y \end{cases}$

Demuestre que f tiene derivadas parciales en $(0,0)$ pero <u>no</u> es diferenciable en $(0,0)$.

Analice qué pasa en el caso: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

▶▶▶ **9.** Sea $f(x,y) = \begin{cases} x^2y\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(a) Analice la continuidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Analice la existencia de derivadas parciales de f en todo $\mathbb{R}^2$ y calcúlelas.

(c) Analice la continuidad de las derivadas parciales de f en todo su dominio.

(d) Analice la diferenciabilidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

★★★ **10.** Repita el análisis del ejercicio anterior para las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = x|y| \operatorname{sen} y$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{|x^3y|}$

▷ ▶▶ **11.** Si cree que aún tiene dificultades con los ejercicios anteriores, busque más en los libros de texto y trate de resolverlos.

★★★ **12.** Decidir en cuáles puntos no son continuas las siguientes funciones (tomar el mayor dominio posible para f)

(a) $f(x,y) = (y + \tan(x),\, \ln(x+y))$,
(b) $f(x,y) = \left(\frac{1}{y^2+1},\, \frac{x}{y^2-1}\right)$,
(c) $f(u,v) = (v + \tan(u), u + \operatorname{sen}(v), v)$,
(d) $f(u,v) = (3u - 4v,\, u + 8v)$,
(e) $f(x,y) = (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2},\, x^2 + y^2)$.

▶▶▶ **13.** Sea f la función vectorial definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2,\, 2xy)$. Encuentre la matriz jacobiana de f en los siguientes puntos: $a)\ (x,y)$ $\quad b)\ (a,b)$ $\quad c)\ (1,0)$.

▶▶▶ **14.** Encuentre la matriz jacobiana de las siguientes funciones en los puntos indicados.

(a) $A(u,v) = (u+v,\, u-v,\, 1)$ en $(u,v) = (1,0)$

(b) $f(x,y,z) = (x+y+z,\, xy+yz+zx,\, xyz)$ en (x,y,z).

▶▶▶ **15.** Sea P una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, definida por $P(x,y,z) = (x,y)$.

(a) ¿Cúal es la interpretación geométrica de esta transformación?

(b) Demuestre que P es diferenciable en todos los puntos y encuentre la matriz de la diferencial de P en $(1,1,1)$.

▶▶▶ **16.** ¿Cuál es la matriz jacobiana de la siguiente función afín:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}?$$

▶▶▶ **17.** Demuestre que toda función lineal es su propia diferencial.

▶▶▶ **18.** ¿En qué puntos no son diferenciables las siguientes funciones? ¿Por qué?

(a) $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2},\ x^2 + y^2\right)$.

(b) $g(x,y) = (\sqrt{x^2 - y^2},\ x + y)$.

(c) $h(x,y) = \begin{cases} (x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}),\ x + y) & \text{si } x \neq 0 \\ (0, x^2 + y^2) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(d) Aproximar por una función afín a $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$ y a $h(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

▶▶▶ **19.** Dadas

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy + 1 \\ y^2 + 2 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ 2u \\ v^2 \end{pmatrix},$$

encontrar la matriz de la diferencial de $g \circ f$ en $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

▶▶▶ **20.** Considerar las funciones

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = w.$$

(a) Hallar la matriz jacobiana de $F \circ f$ en $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

(b) Hallar $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

▶▶▶ **21.** Una caja rectangular cerrada tiene dimensiones de 80 cm, 60 cm y 50 cm, con un error posible de 0,2 cm. en cada dimensión. Utilice diferenciales para estimar el error en el cálculo del área de la superficie de la caja.

▶▶▶ **22.** Cuatro números positivos, cada uno menor que 50, son redondeados a la primera cifra decimal y luego multiplicados entre sí. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible del producto que resultaría del redondeo.

▶▶▶ **23.** Utilice la regla de la cadena para encontrar las derivadas parciales indicadas:

(a) $w = x^2 + y^2 + z^2,\ x = st,\ y = s\cos(t),\ z = s\operatorname{sen}(t);\quad \dfrac{\partial w}{\partial s},\ \dfrac{\partial w}{\partial t}$.

(b) $z = y^2 \tan(x),\ x = t^2uv,\ y = u + tv^2;\quad \dfrac{\partial z}{\partial t},\ \dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}.$

►►► **24.** Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

(a) $xe^y + yz + ze^x = 0.$ (b) $xyz = \cos(x + y + z).$

►►► **25.** Sea $z = f(x, y)$. Haga el cambio de variables $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 2xy - y^2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy + 2$, encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, cuando $r = 2$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

►►► **26.** Si $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ usando la regla de la cadena. Compruebe el resultado por sustitución directa.

►►► **27.** Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, pruebe que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

▷ ►► **28.** Sea $F(u, v, w)$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que $F_u(u, v, w) = 2$, $F_v(u, v, w) = v$ y $F_w(u, v, w) = v$. Definimos:

$$f(x, y) = F(x^2 + y, x^2, e^{xy}), \qquad g(t) = f(t, \cos(t)).$$

Calcule $f_x(x, y),\ f_y(x, y)$ y $g'(t)$.

►►► **29.** Sea $f(x, y)$ una función a valores reales tal que

$$f_x(2, 1) = 3,\quad f_y(2, 1) = -2,\quad f_{xx}(2, 1) = 0,\quad f_{xy}(2, 1) = f_{yx}(1, 2) = 1,\quad f_{yy}(2, 1) = 2.$$

Sea $(x, y) = (u + v, uv)$. Encuentre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ en $(u, v) = (1, 1)$.

►►► **30.** Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

es solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

►►► **31.** Para cada una de las siguientes funciones, encuentre su derivada direccional en la dirección del vector $\mathbf{u}$, en el punto $\mathbf{x}$:

(a) $f(x, y, z) = xyz$; $\mathbf{u} = (\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta), \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta), \cos(\beta))$; $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$.

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$; $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{x} = (1, 1)$.

(c) $f(x, y) = e^x\,\mathrm{sen}(y)$; $\mathbf{u} = (\cos(\alpha), \mathrm{sen}(\alpha))$, $\mathbf{x} = (1, 0)$.

►►► **32.** Encuentre el valor absoluto de la derivada direccional en $(1, 2, 1)$ de la función $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$ en la dirección normal en $(1, 2, 1)$ a la superficie definida implícitamente por $x - yz^2 + z^3 = 0$.

►►► **33.**

(a) Sea f diferenciable en $\mathbf{p}_0$ y tal que si $w = f(x, y)$, la derivada direccional de w en $\mathbf{p}_0 = (1, 2)$ en la dirección $\mathbf{p}_1 = (2, 3)$ es $2\sqrt{2}$, y en la dirección $\mathbf{p}_2 = (1, 0)$ es -3. ¿Cuál es la derivada direccional de w en $\mathbf{p}_0$ en la dirección $(-1, 2)$?

(b) Ahora sea f diferenciable en un $\mathbf{p}_0 = (a, b)$ y tal que se conocen las derivadas direccionales de f en $\mathbf{p}_0$ en las direcciones $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. ¿Pueden conocerse las derivadas en $\mathbf{p}_0$ en cualquier dirección? ¿Qué condición sobre $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ permiten hacerlo?

►►► **34.** Demuestre que la función f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tiene derivada direccional en todas direcciones en el punto $(0, 0)$, pero <u>no</u> es diferenciable en $(0, 0)$.

►►► **35.** Calcule el gradiente de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $f(x, y, z) = (x - y)\cos(xz); \quad (1, 2, -1)$.

(b) $f(\mathsf{x}) = |\mathsf{x}|^2; \quad \mathsf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

(c) $f(\mathsf{x}) = |\mathsf{x}|^\alpha; \quad \mathsf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

►►► **36.** Para las funciones del ejercicio anterior halle la dirección y la tasa de máximo crecimiento en el punto indicado.

►►► **37.** Demuestre que si f es diferenciable en x_0, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathsf{x}_0) = \nabla f(\mathsf{x}_0) \cdot \mathbf{u}$

►►► **38.** Dadas las siguientes superficies, indique dos vectores tangentes (no paralelos) al gráfico en el punto indicado, encuentre la ecuación general del plano tangente en el punto indicado, y la ecuación paramétrica de la recta normal al mismo, en el punto de tangencia:

(a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ en $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.

(b) $z = x^2 y^2$ en $(1, 2, 4)$.

(c) $x^2 + y^2 - z^2 = 2$ en $(1, 1, 0)$ y en $(0, 0, 0)$.

(d) $z + 1 = xe^y \cos z,$ en $(1, 0, 0)$.

(e) $|\mathsf{x}| = 2$ en $\mathbf{e}_1$.

▷ ▷ ▶ **39.** Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Demuestre que ∇F es ortogonal a la recta tangente a la curva de nivel definida por $F(x,y) = 0$ en cualquiera de sus puntos.

▶▶▶ **40.** Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, su gráfico puede definirse implícitamente como la superficie de nivel S de la función $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ dada por $F(x,y,z) = 0$.

(a) Muestre que $\nabla F = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$, el cual es un vector nunca nulo.

(b) Encuentre el vector normal y el plano tangente al gráfico de $f(x,y) = xy + ye^x$ en $(1,1)$.

▶▶▶ **41.** Sea $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ y sean $x_0 = (1,0)$, $y_1 = (0.1,0)$, $y_2 = (0,0.1)$, $y_3 = (0.1,0.1)$.

(a) Calcule $f(x_0 + y_i)$ para $i = 1,2,3$.

(b) Encuentre la función afín A que aproxima a f cerca de x_0.

(c) Use A para encontrar aproximaciones de los vectores $f(x_0 + y_i)$ con $i = 1,2,3$.

▶▶▶ **42.** La temperatura T en una esfera de metal sólida es inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera, el cual se considera que es el origen. La temperatura en el punto $(1,2,2)$ es 120^o.

(a) Encuentre la razón de cambio de T en $(1,2,2)$ en dirección al punto $(2,1,3)$.

(b) Demuestre que en cualquier punto de la esfera la dirección de máximo aumento de la temperatura está dada por un vector que apunta hacia el origen.

▶▶▶ **43.** Supongase que se está escalando una colina cuya configuración está dada por la ecuación $z = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ y que una persona se encuentra en un punto con coordenadas $(60,100,764)$.

(a) Determine en qué dirección debe moverse inicialmente para llegar a la cima lo más rápidamente posible.

(b) Si la persona asciende en esa dirección, determine a qué ángulo sobre la horizontal estará escalando inicialmente.

PRÁCTICO 6: Funciones inversas e implícitas.

☐ **Teorema de la función inversa:**

Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ una función continuamente diferenciable en un entorno de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, con valores también en $\mathbb{R}^n$.

Si la diferencial $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ es inversible entonces existe una función diferenciable $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ en un entorno de $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, que invierte a $\mathbf{f}$, es decir: $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$. Además,

$$D\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \Big[D\mathbf{f}(\mathbf{a})\Big]^{-1}$$

☐ **Teorema de la función implícita:**

Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ una función continuamente diferenciable en un entorno de $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, con valores en $\mathbb{R}^m$. Sea $\mathbf{c} = \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^m$.

Si la diferencial de $\mathbf{F}$ con respecto a las variables $\mathbf{y}$, $D_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, es inversible entonces existe una función $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, definida y continuamente diferenciable en un entorno de $\mathbf{a}$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$ para todo $\mathbf{x}$ en ese entorno. Además,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\big[D_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\big]^{-1} D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

►►► **1.** Escriba claramente el concepto de diferenciabilidad. ¿Cuándo una función es diferenciable?

►►► **2.** Sea $f : A \to B$ una función. Mostrar que f tiene inversa si y sólo si es biyectiva.

►►► **3.** Sea $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Observar que identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ de manera que $(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$ entonces $f(x, y)$ se corresponde con la función $g(z) = z^2$.

(a) Mostrar que para todo punto $\mathbf{x}_0$ excepto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ la restricción de f a algún entorno abierto de $\mathbf{x}_0$ tiene inversa.

(b) Mostrar que si no se restringe el dominio, f no tiene inversa.

(c) Si f^{-1} es la inversa de f en un entorno de $(1, 2)$, calcular la transformación afín $A(x, y)$ que aproxima f^{-1} cerca de $f(1, 2) = (-3, 4)$.

(d) Si $w = (-3.2, 4.1)$, calcular $u = A(w)$ y comprobar que $f(u) \approx w$.

▷▷► **4.**

(a) Sea T definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} r > 0, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Encontrar $DT_{\mathbf{u}}$ y su inversa en aquellos $\mathbf{u} = (r, \theta)$ donde existan.

(b) Calcular T^{-1} explícitamente, y comparar $D(T^{-1})_{\mathbf{x}}$ y $[DT_{\mathbf{u}}]^{-1}$ en los puntos correspondientes.

(c) Sea S definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} r \operatorname{sen} \phi \ \cos \theta \\ r \operatorname{sen} \phi \ \operatorname{sen} \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 0 < r, \\ 0 < \phi < \pi/2, \\ 0 < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Hallar $DS_{(r,\phi,\theta)}$ en los puntos donde exista.

(d) Calcular S^{-1} explícitamente.

▶▶▶ **5.** Probar que la función diferenciable

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, x) \\ f(x, y, z) + g(x, y, z) \end{pmatrix}$$

no puede tener nunca una inversa diferenciable.

▶▶▶ **6.** Probar que existen funciones inversibles en un entorno de un punto x_0 sin tener la derivada inversible en x_0.

▶▶▶ **7.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que $f'(0)$ es inversible pero que f no tiene inversa en ningún entorno de 0. ¿Por qué no se cumple el teorema de la función inversa?

▶▶▶ **8.** Claramente el punto $(x, y) = (0, 0)$ es una solución del sistema de ecuaciones

$$e^x + xy + e^y = 2$$
$$x^3 - x + y + y^3 = 0.$$

Demuestre entonces que en un entorno suficientemente pequeño del punto $(0, 0)$ no existe ninguna otra solución.

▶▶▶ **9.** Si

$$\begin{cases} x = u + v + w \\ y = u^2 + v^2 + w^2 \\ z = u^3 + v^3 + w^3, \end{cases}$$

calcule $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en la imagen $(x, y, z) = (2, 6, 8)$ de $(u, v, w) = (1, 2, -1)$.

▶▶▶ **10.**

(a) Probar que las ecuaciones

$$2x + y + 2z + u - v - 1 = 0$$
$$xy + z - u + 2v - 1 = 0$$
$$yz + xz + u^2 + v = 0$$

definen x, y y z como funciones de u y v cerca de $(x, y, z, u, v) = (1, 1, -1, 1, 1)$.

(b) Hallar la matriz de la diferencial de la funcion implícitamente definida

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(u,v) \quad \text{en} \quad (u,v) = (1,1).$$

►►► **11.** Probar que bajo las hipótesis del teorema de la función implícita existe una única función f tal que $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$ en un entorno de $\mathbf{a}$. *Ayuda: usar la función $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ y aplicar el teorema de la función inversa.*

►►► **12.** Demuestre que la ecuación $x^6 + y^6 + x^2 + y = 0$ define en un entorno del punto $(0,0)$ una única función $y = y(x)$. Determine $y''(0)$ y demuestre que $x = 0$ es un máximo local. ¿Se puede pensar a x como función de y, no necesariamente x diferenciable?

►►► **13.** Considerar la ecuación $(x-2)^3 y + xe^{y-1} = 0$.

(a) ¿Está y definida implícitamente como función de x en un entorno de $(x,y) = (2,1)$?

(b) ¿En un entorno de $(0,0)$? ¿En un entorno de $(1,1)$?

►►► **14.** El punto $(x,y,t) = (0,1,-1)$ satisface las ecuaciones

$$xyt + \operatorname{sen}(xyt) = 0, \quad x + y + t = 0.$$

¿Están x e y definidas implícitamente como función de t en un entorno de $(0,1,-1)$?

►►► **15.** La hipótesis de que $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tenga inversa en el teorema de la función implícita no es condición necesaria para que la ecuación $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}$ defina una única función diferenciable f tal que $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Probar esto tomando $F(x,y) = x^9 - y^3$ y $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (0,0)$.

PRÁCTICO 7: Desarrollo de Taylor.

►►► **1.** Encuentre el desarrollo de Taylor de tercer grado de $(u+v)^3$,

(a) alrededor de $(u_0, v_0) = (0, 0)$,

(b) alrededor de $(u_0, v_0) = (1, 2)$.

►►► **2.** Encuentre la mejor aproximación de segundo grado de la función $f(x, y) = xe^y$ cerca del punto $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

►►► **3.** Calcular el desarrollo de Taylor de segundo grado de xe^{x+y} en $(x_0, y_0) = (0, 0)$,

(a) calculando las derivadas,

(b) por sustitución.

►►► **4.** Si $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$, usar el desarrollo de Taylor de f para calcular $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0)$.

►►► **5.** Probar que $(0, 0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y, z) = \cos(x^2 + yz)$ y analizar si es extremo relativo o no, usando el polinomio de Taylor de grado 2.

►►► **6.** Hallar el polinomio de Taylor de grado $2n$ de la función $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + xy}$ en el $(0, 0)$.

PRÁCTICO 8: Puntos críticos de funciones.

►►► **1.** Repase el desarrollo del test de las derivadas segundas. Enúncielo claramente.

►►► **2.** Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y decida si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de silla en $\mathbf{x}_0$.

(a) $f(x,y) = x^2y^2$

(b) $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(y)$

(c) $f(x,y) = x^2 - xy - y^2 + 5y - 1$

(d) $f(x,y) = e^x \cos y$

(e) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

(f) $f(x,y) = x^4 + y^4$

(g) $f(x,y) = (x-y)^4$

►►► **3.** Repase el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos de una función sujeta a restricciones.

►►► **4.** Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el valor máximo de las funciones dadas sujeta a las restricciones indicadas.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2; \quad x^4 + y^4 = 4.$

(b) $f(x,y,z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4.$

(c) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n; \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$

(d) $f(x,y,z) = x(y+z); \quad x^2 + y^2 = 1$ y $xz = 1.$

►►► **5.** Encuentre los máximos y mínimos de las siguientes funciones en las regiones indicadas:

(a) $x + y$ en el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

(b) $x + y + z$ en la región $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(c) $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ en la región $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$.

(d) $x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy$ en la elipse $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

►►► **6.** La base de un acuario con un volumen dado V está hecha de pizarra y las paredes laterales están hechas de vidrio. Si la pizarra tiene un costo de cinco veces el del vidrio (por unidad de área), encuentre las dimensiones del acuario que minimizarán el costo de los materiales.

►►► **7.** Pruebe que el rectángulo con área máxima que tiene un perímetro dado es un cuadrado.

►►► **8.** Pruebe que el triángulo con área máxima que tiene un perímetro p dado es equilátero. (Sugerencia: Usar la fórmula de Herón para el área: $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ en donde $s = p/2$, y x, y, z son las longitudes de los lados).

►►► **9.** Supóngase que un científico tiene razón en pensar que dos cantidades x e y están relacionadas linealmente, esto es, $y = mx + b$, por lo menos aproximadamente, para ciertos valores de m y b. El científico lleva a cabo un experimento y colecciona datos en forma de puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, los cuales grafica luego. Estos puntos no se encuentran exactamente en una línea recta, por lo que desea encontrar constantes m y b de manera que la recta $y = mx+b$ "se ajuste" a los puntos lo mejor posible. Sea $d_i = y_i - (mx_i + b)$ la desviación vertical del punto (x_i, y_i) con respecto a la recta. El método de los cuadrados mínimos determina los valores de m y b de manera que se minimice $\sum_{i=1}^n d_i^2$, la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Demuestre que, de acuerdo a este método, la recta de mejor ajuste se obtiene cuando

$$\begin{aligned} m\sum_{i=1}^{n} x_i + bn &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{aligned}$$

de manera que la recta se encuentra resolviendo estas dos ecuaciones en las incógnitas m y b.

►►► **10.** El plano $x + y + 2z = 2$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Encuentre los puntos de esta elipse que están más cerca y más lejos del origen.

►►► **11.** Encuentre la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$. (Indicación: considerar el cuadrado de la distancia como función de cuatro variables.)

►►► **12.** Desigualdad de Schwarz:

(a) Encuentre el máximo y el mínimo de la función $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeta a las restricciones $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Deduzca de (a) la desigualdad de Schwarz: $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Pruebe además que vale la igualdad si y sólo si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son paralelos.

PRÁCTICO 9: INTEGRALES MÚLTIPLES.

▶▶▶ **1.** Usando la definición de la integral doble como límite de sumas de Riemann, calcular $\int_B f(x,y)\,dx\,dy$, donde $f(x,y) = x + 4y$ y $B = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$. [R= 6]

▶▶▶ **2.** Calcular las siguientes integrales iteradas

(a) $\int_{-1}^{0} dx \int_{1}^{2} (x^2y^2 + xy^3)\,dy$ (b) $\int_{0}^{2} dy \int_{1}^{2} |x-2| \operatorname{sen} y\,dx.$

▶▶▶ **3.** Hacer un dibujo del conjunto B y calcular $\int_B f dA$, donde

(a) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ y B el disco $x^2 + y^2 \le 1$. [R= π]

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ y B la región acotada por las rectas $y = x,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$. [R= $\ln 2$]

(c) $f(x,y) = x \operatorname{sen} xy$ y B el rectángulo $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$. [R= π]

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y B consiste de todos los $(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ x^2 - y^2 \ge 0$.

(e) $f(x,y) = x^2$ y B es la región definida por $x > 0$, $x^2 + y^2 \le 2$, $x^2 + y^2 \ge 1$, en los dos órdenes posibles.

▶▶▶ **4.** Calcular las siguientes integrales dobles por integrales iteradas, en los dos órdenes posibles.

(a) $\int_{0}^{2} \int_{1}^{e^x} dy\,dx$ (b) $\int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy\,dx.$

▶▶▶ **5.** Hallar el volumen del sólido cuya base es la región del plano x, y acotado por la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 3x$ y cuya tapa es el plano $z = x + 4$.

▶▶▶ **6.** Hallar el volumen del sólido cuya base es la región del plano x, y acotado por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y la tapa está acotada por el paraboloide $az = x^2 + y^2$.

▶▶▶ **7.** Evaluar $\int_{0}^{2} \int_{y}^{2} e^{x^2}\,dxdy$. (Ayuda: Grafique la región de integración y cambie el orden.)

▶▶▶ **8.** Encontrar el volumen bajo el gráfico de f sobre la región B, donde

(a) $f(x,y) = x + y + 2$ y B es la región acotada por las curvas $y^2 = x,\ x = 2$. [R= $\frac{128}{15}\sqrt{2}$]

(b) $f(x,y) = |x+y|$ y B es el disco $x^2 + y^2 \le 1$. [R= $\frac{4}{3}\sqrt{2}$]

▶▶▶ **9.** Hallar el área del subconjunto de $\mathbb{R}^2$ acotado por

(a) $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 1 = 0$. [R= 2π] (b) $x = y^2,\ x = 2y - y^2$
(c) $x = y - y^2,\ x + y = 0$.

►►► **10.** Dibujar en $\mathbb{R}^3$ los cilindros sólidos definidos por $x^2+z^2 \leq 1$ y $y^2+z^2 \leq 1$ respectivamente. Calcular el volumen de la intersección. [R= $\frac{16}{3}$]

►►► **11.** Hallar el volumen de los siguientes cuerpos mediante una integral triple:

(a) El tetraedro acotado por el plano $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (con a, b y c positivos) y los planos coordenados.

(b) Considerar en el primer octante la región limitada por el cilindro $x=4-y^2$ y los planos $z=y,\ x=0,\ z=0$.

(c) El volumen común a los cilindros $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+z^2=a^2$.

(d) El elipsoide de semiejes a,b,c.

►►► **12.** Hallar el volumen

(a) Común de la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y el cilindro $x^2+y^2=a^2$.

(b) Acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y el paraboloide $az=x^2+y^2$.

(c) Limitado por la superficie $z=x\sqrt{x^2+y}$ y los planos $x=0, x=1, y=0, y=1$.

(d) Comprendido bajo la superficie $z=xy$ y sobre el triángulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ y $(1,2)$.

(e) Bajo el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y arriba del anillo $4 \leq x^2+y^2 \leq 25$.

(f) Arriba del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

(g) En el interior de la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y fuera del cilindro $x^2+y^2=2ax$.

►►► **13.** Hallar el volumen acotado por el cilindro $y=\cos x$ y los planos $z=y,\ x=0,\ x=\pi/2,\ z=0$.

►►► **14.** Hallar el volumen acotado por las superficies $z=x^2+y^2$, $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)$.

►►► **15.** Se le practica a una esfera de radio a con $a>b\sqrt{2}$ un agujero cuadrado de lado $2b$, cuyo eje coincide con el centro de la esfera. Hallar el volumen removido.

►►► **16.** Hallar el volumen de la porción de esfera $r^2+z^2=a^2$ que está dentro del cilindro $r=a\operatorname{sen}\theta$ (r,z,θ son las coordenadas cilíndricas.)

►►► **17.** Hallar el volumen encerrado por la superficie $r=a\operatorname{sen}\varphi$, en coordenadas esféricas.

►►► **18.** Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la función definida por $(x,y)=T(u,v)=(u^2-v^2,2uv)$ y sea $R_{uv}=\{(u,v): u^2+v^2\leq 1,\ u,v\geq 0\}$.

(a) Graficar la región $R_{xy}=T(R_{uv})$. (Ayuda: usar coordenadas polares).

(b) Calcular

$$\int_{R_{xy}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

►►► **19.** Encontrar el área acotada por la lemniscata $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ pasando a coordenadas polares. [R=$2a^2$]

►►► **20.** Demuestre que la transformación $\begin{cases} x_1 &= u_1 \\ x_2 &= u_1 + u_2 \\ \vdots & \\ x_n &= u_1 + \cdots + u_n \end{cases}$ no cambia volúmenes.

►►► **21.** Encontrar el volumen del sólido que es imagen de una bola de radio a bajo la aplicación lineal dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

►►► **22.** Calcular la integral de $f(x,y,z) = a$ sobre la semiesfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $x \geq 0$. [R=$2/3\pi a$]

►►► **23.** Calcular usando coordenadas cilíndricas $\displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ 0\leq z\leq 1}} x^2\, dx\, dy\, dz$

►►► **24.** Determinar si la integral está definida o no, y en caso afirmativo calcular su valor:

(a) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\, dy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{dx\, dy\, dz}{xyz}$

(c) $\displaystyle\int_C e^{-x-y-z} dx\, dy\, dz$ donde C es la columna infinita $\text{máx}(|x|,|y|) \leq 1, \quad z \geq 0$.

►►► **25.** Sea B la bola $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$. ¿Para qué valores de a existe $\displaystyle\int_B \frac{dV}{|\mathbf{x}|^a}$?

►►► **26.**

(a) Calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy.$ (b) Usar (a) para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$

(c) Calcular $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 \cdots - x_n^2} dx_1 \cdots dx_n.$

○ **Aplicaciones:**

►►► **27.**

(a) Sea B una bola de radio a con una densidad ρ en cada uno de sus puntos igual a la distancia del punto a un diámetro fijo. Encontrar la masa total de la bola. (Ayuda: calcular $\int_B \rho\, dV$ usando coordenadas esféricas).

(b) Sea B un cilindro de altura h y radio a con una densidad ρ en cada uno de sus puntos igual a la distancia del punto al eje del cilindro. Encontrar la masa total del cilindro.

►►► **28.** Hallar el centro de masa de la pirámide homogénea cuya base es el cuadrado delimitado por las rectas $x = 1,\ x = -1,\ y = 1,\ y = -1$ en el plano $z = 0$ y cuyo vértice está en el punto $(0, 0, 1)$.

►►► **29.** Se distribuye carga eléctrica en el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$ de manera que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Encuentre la carga total del disco.

►►► **30.** Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región descrita D y que tiene la función densidad ρ indicada.

(a) D es la región triangular con vértices $(0,0),(2,1),(0,3)$; $\rho(x,y)=x+y$.

(b) D es la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$; $\rho(x,y)=xy$.

►►► **31.** Una lámina ocupa la porción del disco $x^2+y^2\leq 1$ comprendida en el primer cuadrante. Encuentre su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje x.

☐ **Definición:** MOMENTOS DE INERCIA

El momento de inercia de una partícula de masa m con respecto a un eje del cual dista en r, se define como $I=mr$. Esta definición se extiende (*¿Cómo?*) a una lámina con densidad $\rho(x,y)$ que ocupa una región D:

$$I_x=\int\int_D y^2\,\rho(x,y)\,dA,\qquad I_y=\int\int_D x^2\,\rho(x,y)\,dA$$

☐ **Definición:** RADIOS DE GIRO

El radio de giro de una lámina con respecto a un eje es el número R tal que $mR^2=I$, donde m es la masa de la lámina e I es el momento de inercia. En particular, los radios de giro con respecto a los ejes x e y satisfacen: $m\bar{\bar{x}}=I_y$; $m\bar{\bar{y}}=I_x$

►►► **32.** Una lámina con densidad constante $\rho(x,y)=\rho$ ocupa la región comprendida bajo la curva $y=\operatorname{sen}x$ de $x=0$ a $x=\pi$. Encuentre los momentos de inercia I_x e I_y y los radios de giro $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$.

PRÁCTICO 10: Campos vectoriales.

▶▶▶ **1.** Calcule las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C xy^4\,ds$ donde C es la mitad derecha de la circunferencia $x^2+y^2=16$.

(b) $\int_C \frac{dx+dy}{x^2+y^2}$ donde C está dada por $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t)$ y $0\le t\le 2\pi$.

(c) $\int_C xyz\,ds$, $C: x=2t,\ y=3\operatorname{sen} t,\ z=3\cos t,\ 0\le t\le \pi/2$.

(d) $\int_C yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$, C consta de los segmentos rectilíneos de $(0,0,0)$ a $(2,0,0)$, de $(2,0,0)$ a $(1,3,-1)$, y de $(1,3,-1)$ a $(1,3,0)$.

▶▶▶ **2.** Evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C está descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

(a) $\mathbf{F}(x,y)=(e^x,xy),\ \mathbf{r}(t)=(t^2,t^3),\ 0\le t\le 1.$

(b) $\mathbf{F}(x,y)=(x^2,xy,z^2),\ \mathbf{r}(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t,t^2),\ 0\le t\le 1.$

○ **Aplicaciones:**

▶▶▶ **3.** Encuentre el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)=(t,t,t^2)$ con $0\le t\le 2$, bajo la influencia del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y,y,y)$.

▶▶▶ **4.** Encuentre la masa total de cable $\mathbf{r}(t)=(x,y,z)=(6t^2,\sqrt{32}t^3,3t^4)$ con $0\le t\le 1$:

(a) si la densidad en el punto correspondiente a t es t^2,

(b) si la densidad en cualquier punto es su distancia al origen de $\mathbb{R}^3$ (escriba la integral sin calcularla).

▶▶▶ **5.** Encuentre la masa y el centro de masa de un alambre que tiene la forma de la hélice $x=t$, $y=\cos t$, $z=\operatorname{sen} t$, $0\le t\le 2\pi$, si la densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia al origen.

☐ **Definiciones:** Gradiente, divergencia, rotor

El **gradiente** de una función escalar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ es el campo dado por:

$$\nabla(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

La **divergencia** de un campo $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dado por $(F_1,F_2,F_3,\dots,F_n)$ es la función escalar

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}=\nabla\cdot\mathbf{F}$$

El **rotor** de un campo es otro campo, y tiene sentido sólo para $n = 3$:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) = \nabla \times \mathbf{F}$$

☐ **Teoremas importantes:** Green, Stokes, divergencia

• Teorema de **Green**: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada, unión finita de regiones simples, cuyo borde, ∂D, es una curva γ simple, cerrada y lisa o una unión finita de tales curvas, orientada positivamente. $\mathbf{F}_1(x,y), \mathbf{F}_2(x,y)$ son funciones a valores reales continuamente diferenciables sobre todo $D \cup \gamma$:

$$\int\int_D \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \int_\gamma \mathbf{F}_1\, dx_1 + \mathbf{F}_2\, dx_2$$

• Teorema de **Stokes**: Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por una función $g : D \cup \partial D \to \mathbb{R}^3$, C^2, donde D es una unión de regiones simples y ∂D es una curva diferenciable por partes. Si $\mathbf{F}$ es un campo continuamente diferenciable, definido en S, entonces

$$\int\int_S \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

• Teorema de **Gauss**: Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ una unión de regiones simples tal que el borde ∂D es una superficie (unión finita) S positivamente orientada . Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ continuamente diferenciable entonces

$$\int\int\int_D \mathrm{div}(\mathbf{F})\; dx\; dy\; dz = \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\; d\sigma$$

donde N es el vector normal unitario apuntando hacia afuera de la superficie.

►►► **6.**

(a) Demuestre que, si el campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ es conservativo y P, Q, R tienen derivadas parciales de primer orden continuas, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

(b) Demuestre que la integral de línea $\int_C y\; dx + x\; dy + xyz\; dz$ no es independiente de la trayectoria.

►►► **7.** Determine si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo o no. En caso de serlo, encuentre una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - 4y, 2y - 3x)$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = (e^{2x} + x \operatorname{sen} y, x^2 \cos y)$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, 2yz, x + y^2)$

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\cos y, \operatorname{sen} x, \tan z)$

▶▶▶ **8.** Sea $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

(a) Demuestre que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(b) Demuestre que $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria.

▶▶▶ **9.** Evalúe la integral de línea por dos métodos: (i) directamente y (ii) usando el teorema de Green.

(a) $\displaystyle\int_C x\,dx - x^2y^2\,dy$, en donde C es el cuadrado con vértices $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$.

(b) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$, en donde C consta del arco de la parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(2,4)$ y los segmentos rectilíneos de $(2,4)$ a $(0,4)$ y de $(0,4)$ a $(0,0)$.

▶▶▶ **10.** Aplique el teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva positivamente orientada dada.

(a) $\displaystyle\int_C x^2y\,dx - 3y^2\,dy$, en donde C es la circunferencia $x^2+y^2=1$.

(b) $\displaystyle\int_C (xy + e^{x^2})\,dx + (x^2 - \ln(1+y))\,dy$, en donde C consta del segmento rectilíneo de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ y la curva $y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

▶▶▶ **11.** Encuentre el área de la región limitada por la hipocicloide con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

▷▷▶ **12.** Mostrar que si D es una región acotada por una curva C^1 a trozos en $\mathbb{R}^2$ entonces el área de D viene dada por

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint(-y\,dx + x\,dy).$$

▶▶▶ **13.**

(a) Sea D una región limitada por una curva cerrada simple C en el plano xy. Use el teorema de Green para probar que las coordenadas del centroide $(\bar{x},\bar{y})$ de D son

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

en donde A es el área de D.

(b) Encuentre el centroide de una región semicircular de radio A.

▶▶▶ **14.** Cálculo de los momentos de inercia.

(a) Escriba la definición de los momentos de inercia.

(b) Una lámina plana con densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa una región en el plano xy limitada por una curva cerrada simple C. Demuestre que sus momentos de inercia con respecto a los ejes son

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3\,dx \qquad I_y = -\frac{\rho}{3}\oint_C x^3\,dy$$

(c) Encuentre el momento de inercia de un disco circular de radio a con densidad constante ρ con respecto a un diámetro.

►►► **15.** Encuentre el rotor y la divergencia del campo vectorial dado.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} x, \cos x, z^2)$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xz}, -ze^{-y}, y\ln(z))$

►►► **16.** Pruebe las siguientes identidades suponiendo que las derivadas parciales apropiadas existen y son continuas. Si f es una función y $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ son campos vectoriales, entonces se definen los campos vectoriales:

$f\mathbf{F} = (f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)$

$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$

y la función $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\cdot\mathbf{G}(x, y, z)$

(a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

(b) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \operatorname{rot}\mathbf{G}$

(c) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

(d) $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \nabla f \times \mathbf{F}$

(e) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}(\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}(\mathbf{G})$

(f) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

►►► **17.** Encuentre el área de la superficie indicada:

(a) La porción del paraboloide $x = y^2 + z^2$ que se encuentra en el interior del cilindro $y^2 + z^2 = 9$.

(b) El elipsoide $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ (escriba la integral sin calcularla).

(c) La helicoide (o rampa espiral) con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v)$, $0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi$.

►►► **18.** Calcule $\displaystyle\int_S (x^2z + y^2z)\,dS$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0$.

▷▷► **19. Paradoja de la Pintura.** Consideremos la superficie de revolución S_ϵ que resulta de hacer girar alrededor del eje z la curva en el plano (y, z) dada por $z = -\frac{1}{y}$, para $\epsilon \le y \le 1$.

(a) Calcular, usando coordenadas cilíndricas, el volumen encerrado por S_ϵ.

(b) Calcular el área de S_ϵ. (Si no sale la integral propiamente dejarla indicada).

(c) Para los resultados obtenidos en a) y b) hacer tender ϵ a cero. Notemos con lo obtenido que éste sería un recipiente que podría ser llenado de pintura pero no podría ser pintado.

►►► **20.** Calcule $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x,y,z)=(e^y, ye^x, x^2y)$ y S es la porción del paraboloide $z=x^2+y^2$ que se encuentra arriba del cuadrado $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ y tiene orientación positiva.

►►► **21.** Use el teorema de Stokes para evaluar $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(x,y,z)=(y^2z, xz, x^2y^2)$ y S es la porción del paraboloide $z=x^2+y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, orientado hacia arriba.

►►► **22.** Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2y, 1/3x^3, xy)$ y C es la curva de intersección del paraboloide hiperbólico $z=y^2-x^2$ y el cilindro $x^2+y^2=1$, recorrida en sentido antihorario cuando se observa desde arriba.

►►► **23.** Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x,y,z)=(2y,4z,-6x)$ y S la porción del paraboloide $z=9-x^2-y^2$ que se encuentra arriba del plano xy, orientada hacia arriba.

►►► **24.** Calcule el trabajo efectuado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x^x+z^2, y^y+x^2, z^z+y^2)$$

cuando una partícula se mueve bajo su influencia alrededor del borde de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra en el primer octante, en dirección opuesta a la de las agujas del reloj cuando se observa desde arriba.

►►► **25.** Si S es una esfera y $\mathbf{F}$ satisface las hipótesis del teorema de Stokes, demuestre que $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=0$.

►►► **26.** Verifique el teorema de la divergencia para $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz, yz, 3z^2)$ en el sólido E limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el plano $z=1$.

►►► **27.** Aplique el teorema de la divergencia para calcular $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(-xz,-yz,z^2)$, S el elipsoide $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz^2, 1/3y^3+\tan z, x^2z+y^2)$ y S la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

►►► **28.** Utilice el teorema de la divergencia para calcular $\displaystyle\int_S (2x+2y+z^2)\,dS$ donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

►►► **29.** Pruebe las siguientes identidades suponiendo que S y E satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que las funciones escalares y las componentes de los campos vectoriales tienen derivadas parciales de segundo orden continuas.

(a) $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=0,\ \mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$

(b) $\displaystyle\int_S \nabla f\cdot d\mathbf{S}=\int_E \nabla^2 f\,dV$

(c) $\displaystyle V(E)=\frac{1}{3}\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S},\ \mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$

(d) $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=0$