Sistemas de amortización

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

Sistemas de amortización

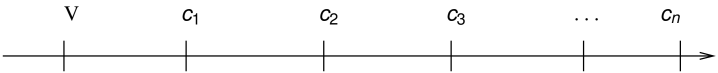
Un sistema de amortización es un método por el cual un capital cedido en préstamo es devuelto por una sucesión de pagos o cuotas.
Estas cuotas periódicas constituyen una renta cuyo valor actual deberá ser igual al préstamo otorgado.

Características de un sistema de amortización

- Es una renta cierta cuyo valor actual al momento del préstamo es igual al préstamo otorgado.

$$c_1\,, c_2\,, \ldots\,, c_n.$$

- Cada cuota c_k está compuesta por:
  - cuota de amortización real v_k
  - cuota de interés s_k.



Composición de las cuotas

Para cualquier sistema de amortización se verifica:

- El valor actual de la renta es igual al préstamo otorgado V.
- La suma de las cuotas de amortización real v_k es igual a V.

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = V.$$

- El capital adeudado en el momento k, VA_k, es igual al valor actual de las cuotas que restan pagar y a la suma de las cuotas de amortización que restan pagar.
- La cuota de interés s_k es el interés sobre el capital adeudado durante el k-ésimo período de la renta:

$$s_k = \big(V - (v_1 + v_2 + \cdots + v_{k-1})\big)\, i,$$

siendo i la tasa de interés durante dicho período.

Sistemas de amortización

Los sistemas de amortización más usuales son los siguientes:

- Sistema francés: Todas sus cuotas son iguales

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n.$$

- Sistema alemán: Todas las cuotas de amortización real son iguales:

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_n.$$

- Sistema americano: Las cuotas de amortización real son todas nulas, excepto la última que es igual a V.

Hipótesis

Asumiremos las siguientes hipótesis:

- n períodos constantes, iguales a la unidad de tiempo.
- Tasa de interés constante i.

Bajo estas hipótesis se verifica:

$$V = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Sistema de amortización alemán

Se caracteriza por tener todas sus cuotas de amortización real iguales.

En el sistema de amortización alemán, las cuotas consituyen una renta cierta en progresión aritmética decreciente, con razón

$$h = -i \cdot \frac{V}{n}$$

$$c_1 = \frac{V}{n} + i \cdot V, \qquad c_{k+1} = c_k - i \cdot \frac{V}{n}.$$

- Las cuotas de interés decrecen en la misma progresión.

$$\boxed{v_k = \frac{V}{n}, \qquad s_k = (n - k + 1)\frac{Vi}{n}}$$

Sistema de amortización francés

Se caracteriza por tener todas sus cuotas iguales.

En el sistema de amortización francés, las cuotas constituyen una renta cierta de cuotas constantes:

$$V = c \cdot a_{\overline{n|}i}.$$

- Las cuotas de interés decrecen.
- Las cuotas de amortización real crecen.

$$\boxed{v_k = \frac{c}{(1+i)^{n+1-k}}, \qquad s_k = c\left(1 - \frac{1}{(1+i)^{n+1-k}}\right)}$$

Sistema de amortización americano

Se caracteriza por tener las primeras $n-1$ cuotas de amortización real nulas:

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_{n-1} = 0, \qquad v_n = V.$$

- Las cuotas de interés son constantes, e iguales a $i \cdot V$.
- La desventaja es que la última cuota es muy alta:

$$V \cdot (1 + i).$$

- Se suele acompañar por una renta a fin de constituir un fondo de amortización (sinking fund).

Reconstitución del fondo de amortización

En el caso del sistema americano, éste suele combinarse con una renta de cuotas constantes e iguales a f, de modo que

$$f \cdot s_{\overline{n}|i'} = V$$

- El prestatario aporta n cuotas de valor

$$f + V \cdot i.$$

- Las cuotas f están sujetas a una tasa de interés i'.
- La ventaja sobre el sistema francés se da si

$$i' > i.$$

Ejemplo

Ejemplo

Un préstamo de \$1000000 es amortizable en 5 años, con el 15 % de interés anual sobre saldos. Los siguientes cuadros resumen los pagos a efectuar según los sistemas alemán y francés respectivamente.

Ejemplo

Período k	Deuda inicial	s_k	v_k	c_k
1	1000000	150000	200000	350000
2	800000	120000	200000	320000
3	600000	90000	200000	290000
4	400000	60000	200000	260000
5	200000	30000	200000	230000
suma		450000	1000000	1450000

Figura: Sistema Alemán

Ejemplo

Período k	Deuda inicial	s_k	v_k	c_k
1	1000000	150000	148315,55	298315,55
2	851684,45	127752,67	170562,89	298315,55
3	681121,56	102168,23	196147,32	298315,55
4	484974,24	72746,14	225569,42	298315,55
5	259404,83	38910,72	259404,83	298315,55
suma		491577,76	1000000	1491577,76

Figura: Sistema Francés

Ejemplo

Período k	Deuda inicial	s_k	v_k	c_k
1	1000000	150000	0,00	150000
2	1000000	150000	0,00	150000
3	1000000	150000	0,00	150000
4	1000000	150000	0,00	150000
5	1000000	150000	1000000,00	1150000
suma		750000	1000000	1750000

Figura: Sistema Americano