Generación de variables aleatorias discretas
Método de la Transformada Inversa

Patricia Kisbye

FaMAF

3 de abril, 2008

Rutina propuesta

```
typedef unsigned long int unlong;
unlong x=521288629, y=362436069, z=16163801,
       c=1, n=1131199209;
unlong mzran13()
{ long int s;
  if (y>x+c) (s=y-(x+c); c=0;}
  else { s=y-(x+c)-18; c=1; }
  x=y; y=z;
  return (z=s) + (n=69069*n+1013904243);
};
void ran13set(unlong xx, unlong yy, unlong zz, long nn)
  { x=xx; y=yy; z=zz; n=nn; c=y>z; }
```

mzran13()

El generador mzran13 de números aleatorios combina los siguientes generadores: Combina los generadores:

$$x_n = 69069 x_{n-1} + 1013904243 \mod 2^{32}$$

$$y_n = y_{n-2} - y_{n-3} - c' \mod 2^{32} - 18$$

donde c es un ”bit de acarreo”.

$$x_n + y_n \mod 2^{32}.$$

Analizamos el algoritmo en C propuesto por Zaman y Marsaglia.

Generación de v.a. discretas

- Asumimos un generador de valores de una v.a. uniforme $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.
- Métodos:
  - Transformada Inversa
  - de aceptación-rechazo o método de rechazo.
  - de composición.

Método de la Transformada Inversa

Consideramos una variable aleatoria X con distribución de masa

$$P(X = x_j) = p_j$$

$j = 0, 1, \ldots, \sum_j p_j = 1$.

Su función de distribución acumulada es una función creciente, escalonada, que toma valores entre 0 y 1.

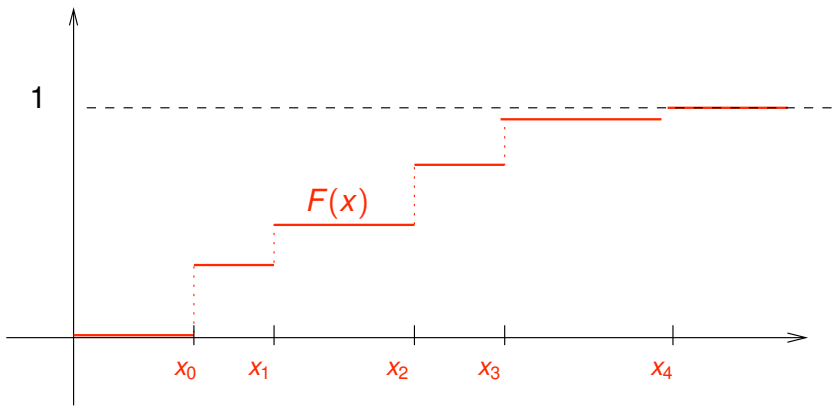
Asumimos que los valores de la variable están ordenados en forma creciente:

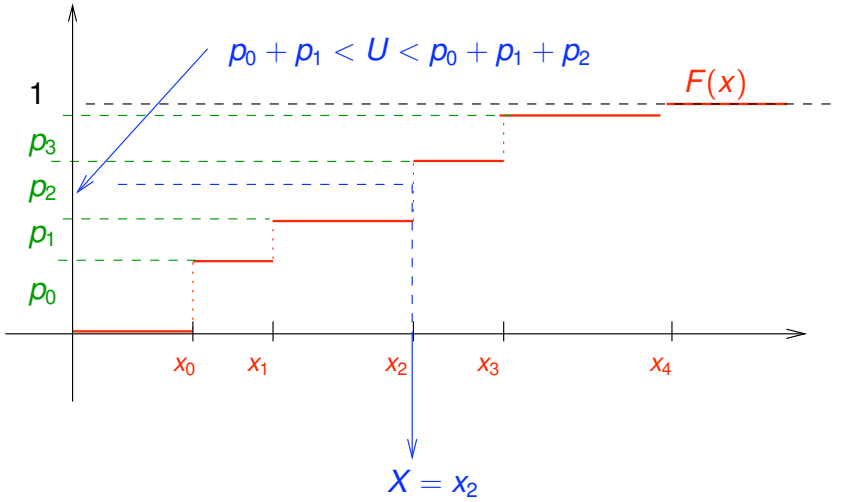
$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \ldots.$$

Para generar un valor de la variable aleatoria X, generamos un número aleatorio $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y hacemos

$$X = \begin{cases} x_0 & \text{si } U < p_0 \\ x_1 & \text{si } p_0 < U < p_0 + p_1 \\ \vdots & \\ x_j & \text{si } p_0 + \cdots + p_{j-1} < U < p_0 + \cdots + p_{j-1} + p_j \\ \vdots & \end{cases}$$

$$P(X = x_j) = P(p_0 + \cdots + p_{j-1} < U < p_0 + \cdots + p_{j-1} + p_j) = p_j.$$





Algoritmo:

- Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.
- Si $U < p_0$ hacer $X = x_0$ y terminar.
- Si $U < p_0 + p_1$ hacer $X = x_1$ y terminar.
- Si $U < p_0 + p_1 + p_2$ hacer $X = x_2$ y terminar.
- ...

Notemos que si $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, entonces $F(x_k) = \sum_{i=0}^{k} p_i$, y por lo tanto

$$X = x_j \qquad \text{si} \qquad F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j)$$

$$U \in [F(x_{j-1}), F(x_j)) \qquad \Longleftarrow \qquad \text{Transformada Inversa}$$

Ejemplo

$X : \{1, 2, 3, 4\}$.

$$p_1 = 0.20, \quad p_2 = 0.15, \quad p_3 = 0.25, \quad p_4 = 0.40$$

- Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.
- Si $U < 0.20$ hacer $X = 1$ y terminar.
- Si $U < 0.35$ hacer $X = 2$ y terminar.
- Si $U < 0.60$ hacer $X = 3$ y terminar.
- Si no, hacer $X = 4$.

Si se ordenan las probabilidades $p_0, p_1, \ldots$, se puede obtener un algoritmo más eficiente:

Ejemplo

$X : \{1, 2, 3, 4\}$.

$$p_1 = 0.20, \quad p_2 = 0.15, \quad p_3 = 0.25, \quad p_4 = 0.40$$

- Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.
- Si $U < 0.40$ hacer $X = 4$ y terminar.
- Si $U < 0.65$ hacer $X = 3$ y terminar.
- Si $U < 0.85$ hacer $X = 1$ y terminar.
- Si no, hacer $X = 2$.

Para generar una v.a. uniforme discreta en $[1, n]$:

$$X = j \qquad \text{si} \qquad \frac{j-1}{n} \leq U < \frac{j}{n}$$

$$X = j \qquad \text{si} \qquad j - 1 \leq nU < j$$

$$X = \lfloor nU \rfloor + 1$$

siendo $\lfloor x \rfloor$ la parte entera (inferior) de x.

Ejemplo

Generar una variable aleatoria discreta X, con distribución uniforme en $[5, 15]$.

- El intervalo entero $[5, 15]$ contiene 11 números enteros.
- $\lfloor 11\,U \rfloor$ es un entero en $[0, 10]$.
- $\lfloor 11\,U \rfloor + 5$ es un entero en $[5, 15]$.

Algoritmo

Generar U
$X = \lfloor 11U \rfloor + 5$

Ejemplo

- Conjunto de 5 elementos: a, b, c, d, e.
- k recorre el vector, de la posición $n = 5$ hasta 2.
- I: selecciona un elemento entre las posiciones 1 y k para intercambiar.
- La tabla se lee por columnas de izquierda a derecha.

I		4	2	3	1
k		5	4	3	2
	a	a	a	a	e
	b	b	e	e	a
	c	c	c	c	c
	d	e	b	b	b
	e	d	d	d	d

Generación de una permutación aleatoria

Aplicación: Generación de permutaciones aleatorias de un conjunto de n elementos, todas con la misma probabilidad

Paso 1 : Sea P_1, P_2, . . . , P_n una permutación de 1,2,. . . , n.
Paso 2 : $k = n$
Paso 3 : Generar U y hacer $I = [kU] + 1$.
Paso 4 : Intercambiar los valores de P_I y P_k.
Paso 5 : Hacer $k = k - 1$ y si $k > 1$ ir a Paso 3.
Paso 6 : $P_1, \ldots, P_n$ es la permutación buscada.

Permutaciones aleatorias

Otro método para generar una permutación aleatoria de un conjunto de tamaño n consiste en

- generar n números aleatorios $U_1, U_2, \ldots, U_n$,
- ordenarlos: $U_{i_1} < U_{i_2} < \cdots < U_{i_n}$,
- utilizar los índices de los valores ordenados para hacer la permutación.

Permutaciones aleatorias

Ejemplo

Obtener una permutación aleatoria de (a, b, c, d).

- $U_1 = 0.4$, $U_2 = 0.1$, $U_3 = 0.8$, $U_4 = 0.7$.
- $U_2 < U_1 < U_4 < U_3$.
- La permutación es (b, a, d, c).

Desventaja: Se requieren $1 + 2 + \cdots + (n-1) = O(n\log(n))$ comparaciones.

Un "mal" método Si en el primer algoritmo permutamos el k-ésimo lugar de la tabla con uno de toda la tabla, también obtenemos permutaciones aleatorias. ¿Tienen una distribución uniforme?

No. ¿Por qué?

Sencillo:

$$\frac{n^n}{n!} \qquad \text{no es un número entero.}$$

Cálculo de promedios

Ejemplo

Aproximar el valor de

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a(i)}{n}$$

siendo que $n \gg 1$ *y* $a(i)$ *tiene una expresión complicada.*

- Tomamos X uniforme discreta en $[1, n]$.
- $a(X)$ es una v.a. discreta con media

$$E[a(X)] = \sum_{i=1}^{n} a(i)P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a(i)}{n} = \bar{a}.$$

- Generamos $U_1, U_2, \ldots, U_k$ aleatorios en $(0, 1)$, $X_i = \lfloor nU_i \rfloor + 1$.
- Ley fuerte de los grandes números:

$$\bar{a} \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{a(X_i)}{k} \qquad k \text{ grande}$$

Ejemplos

Ejemplo (Variable aleatoria geométrica)

$$P(X = i) = pq^{i-1}, \qquad i \geq 1, q = (1 - p).$$

Tenemos que $F(j-1) = P(X \leq j-1) = 1 - P(X > j) = 1 - q^j$.

$$X = j \qquad \text{si} \qquad 1 - q^{j-1} \leq U < 1 - q^j$$

$$X = j \qquad \text{si} \qquad q^j < 1 - U \leq q^{j-1}$$

$$X = \min\{j \ : \ q^j < 1 - U\}$$

Variable aleatoria geométrica

- El logaritmo es una función creciente,
- $\log(q)$ es negativo,
- usando la notación "parte entera de",
- $1 - U$ también es uniforme en $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} X &= \min\{j \,:\, j\log(q) < \log(1-U)\} \\ &= \min\left\{j \,:\, j > \frac{\log(1-U)}{\log(q)}\right\} \\ &= \left\lfloor \frac{\log(1-U)}{\log(q)} \right\rfloor + 1 \\ X &= \left\lfloor \frac{\log(U)}{\log(q)} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

Variable aleatoria Poisson

Algoritmo

Paso 1 Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

Paso 2 $i = 0$, $p = e^{-\lambda}$, $F = p$.

Paso 3 Si $U < F$, hacer $X = i$ y terminar.

Paso 4 $p = \dfrac{\lambda p}{(i+1)}$, $F = F + p$, $i = i + 1$.

Paso 5 Volver al Paso 3.

- El algoritmo chequea desde 0 en adelante hasta obtener el valor deseado.
- El número de comparaciones es 1 más que el valor generado.
- El promedio de comparaciones es $\lambda + 1$.

Ejemplos

Ejemplo (Variable Aleatoria Poisson)

$$p_i = P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Usamos la identidad

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1}p_i, \quad i \geq 0.$$

$$\mathrm{E}[X] = \lambda \qquad \mathrm{Var}[X] = \lambda.$$

Una mejora para generar Poisson

- Si $\lambda \gg 1$, el algoritmo anterior realiza muchas comparaciones.
- Los valores más probables son los enteros más cercanos a λ.

Mejora del algoritmo

- Tomar $I = \lfloor \lambda \rfloor$.
- Calcular $F(I)$ usando la definición recursiva de p_i.
- Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.
- Si $U \leq F(I)$, generar X haciendo búsqueda descendente.
- Si $U > F(I)$, generar X haciendo búsqueda ascendente.

Promedio de búsquedas $\simeq 1 + 0.798\sqrt{\lambda}$

Ejemplos

Ejemplo (Variable Aleatoria Binomial $B(n,p)$)

$$p_i = P(X=i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}p^i(1-p)^{n-i}, \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

Usamos la identidad

$$p_{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\frac{p}{1-p}p_i, \quad 0 \le i < n.$$

$$\mathrm{E}[X] = np \qquad \mathrm{Var}[X] = np(1-p).$$

Variable aleatoria Binomial

Algoritmo

Paso 1 Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

Paso 2 $i = 0$, $c = p/(1-p)$, $pr = (1-p)^n$, $F = pr$.

Paso 3 Si $U < F$, hacer $X = i$ y terminar.

Paso 4 $pr = [c(n-i)/(i+1)]pr$, $F = F + pr$, $i = i+1$.

Paso 5 Volver al Paso 3.

- El algoritmo chequea desde 0 en adelante hasta obtener el valor deseado.
- El número de comparaciones es 1 más que el valor generado.
- El promedio de comparaciones es $np+1$.

Métodos alternativos para generar una Binomial $B(n,p)$

- Si $p > 1/2$, generar $n - B(n, 1-p)$. (menor número de comparaciones).
- Generar $U_1, \ldots, U_n$, y contabilizar cuántas son menores que p. (n comparaciones)
- Utilizar la sugerencia análoga para Poisson. (menor número de comparaciones).