GRUPOS FINITOS Y SUS REPRESENTACIONES

JUAN MARTÍN MOMBELLI

Las presentes notas surgen de un breve curso dictado en La Universidad Sergio Arboleda en Bogotá, Colombia durante los meses de enero y febrero del 2007.

El objetivo principal del curso fue introducir los principales resultados en la teoría de representación de grupos finitos. He intentado, en lo posible, de que estas notas sean lo más autocontenidas posibles. Sin embargo ciertos conocimientos básicos del álgebra lineal son requeridos.

Quisiera agradecer a todos los miembros del departamento de matemática de la Universidad Sergio Arboleda, a los alumnos del curso, y en especial al profesor Reinaldo Nuñez, al profesor Jesús Hernando Perez y a María Alicia León por la amable hospitalidad que me han brindado durante mi estadía en Colombia.

J.M. Mombelli

25 de abril de 2007.

Índice

1. Notación y Preliminares

Durante todo el trabajo se asume que el lector esta familiarizado con los conceptos de grupos y espacios vectoriales, asi como los principales resultados de ambas teorías. Sin embargo, en esta sección trataremos de recordar aquellas definiciones, construcciones y resultados mas significativos, que requeriremos más adelante.

Durante todo el trabajo $\Bbbk$ denotará un cuerpo arbitrario y denotaremos $\Bbbk^{\times} = \Bbbk - \{0\}$. Dado V un espacio vectorial sobre $\Bbbk$, denotaremos por $\operatorname{End}(V)$ al espacio vectorial de las transformaciones lineales de V en V. Además denotaremos por $GL(V)$ al subconjunto de $\operatorname{End}(V)$ formado por las transoformaciones lineales biyectivas.

1.1. Producto tensorial. En esta sección recordaremos brevemente el producto tensorial de dos espacios vectoriales.

Sean V, W, U espacios vectoriales.

Definición 1.1.1. Una *transformación bilineal* es una función $\beta : V \times W \to U$ tal que

$$\beta(\lambda v + u, w) = \lambda\beta(v, w) + \beta(u, w),$$
$$\beta(v, \lambda w + x) = \lambda\beta(v, w) + \beta(v, x).$$

Para todo $v, w \in V$, $w, x \in W$, $\lambda \in \Bbbk$.

Una *forma bilineal* es una transformación lineal $\beta : V \times W \to \Bbbk$. Una forma bilineal se dice *simétrica* (respectivamente *alternante*) si $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ ($\beta(v, w) = -\beta(w, v)$ resp.) para todo $v \in V$, $w \in W$.

El conjunto de forma bilineales $\beta : V \times V \to \Bbbk$ será denotado por $Bil(V)$. Es inmediato comprobar que $Bil(V)$ posee una estructura de espacio vectorial sobre $\Bbbk$ de la manera obvia y los subconjuntos $Sim(V)$ y $Alt(V)$ de formas bilineales simétricas y alternates, respectivamente, son subespacios vectoriales.

Lema 1.1.2. *Asumamos que* $char(\Bbbk) \neq 2$. *Entonces* $Bil(V) = Sim(V) \oplus Alt(V)$.

Demostración. Es facil demostrar que $Sim(V) \cap Alt(V) = 0$. Sea $\beta \in Bil(V)$. Definimos

$$\beta_0(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) + \beta(w, v)), \quad \beta_1(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v)). \tag{1.1.1}$$

Es inmediato comprobar que $\beta = \beta_0 + \beta_1$ y que $\beta_0 \in Sim(V)$, $\beta_1 \in Alt(V)$. □

Dados V y W dos espacios vectoriales sobre $\Bbbk$ vamos a denotar por $V\Box W$ al espacio vectorial generado por los símbolos $v\Box w$ sujeto a las relaciones

$$(v_1 + v_2)\Box w = v_1\Box w + v_2\Box w, \quad v\Box(w_1 + w_2) = v\Box w_1 + v\Box w_2,$$

para todo $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$. Sea S el subespacio de $V\Box W$ generado por los elementos $\lambda\, v\Box w - v\Box\lambda\, w$, $\lambda \in \Bbbk$, $v \in V, w \in W$.

El producto tensorial de V y W es el espacio cociente

$$V\otimes W = V\Box W/S.$$

Denotemos por $p : V\Box W \to V\otimes W$ a la proyección canónica.

Vamos a caracterizar al producto tensorial con una cierta propiedad universal.

Proposición 1.1.3. *Sea* $\beta : V \times W \to \Bbbk$ *una forma bilineal. Entonces existe una única transformación lineal* $\widehat{\beta} : V\otimes W \to U$ *tal que* $\widehat{\beta} \circ p = \beta$.

1.2. Grupos.

Definición 1.2.1. Un *grupo* es un conjunto G munido de una operación $\cdot : G \times G \to G$, que llamaremos el producto, un elemento distinguido $1 \in G$ llamado elemento *unidad*, tal que para todo $g, h, f \in G$ se verifica

- $(g \cdot h) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$,
- $g \cdot 1 = 1 \cdot g$,
- existe un elemento $\widetilde{g} \in G$ tal que $g \cdot \widetilde{g} = 1 = \widetilde{g} \cdot g$. Dicho elemento se lo lo llama *un inverso* de g.

Se deduce de los tres axiomas que el inverso de un elemento g es único, y lo denotaremos por g^{-1}. Es usual denotar el producto de dos elementos $g, h \in G$ simplemente por yuxtaposición, es decir que el producto de ellos lo denotaremos por gh.

Definición 1.2.2. ∗ El *orden de un grupo* es el cardinal del conjunto subyacente. Al orden de un grupo G lo denotaremos por $|G|$.

∗ Un grupo G se dice *Abeliano* si para todo par de elementos $g, h \in G$ se cumple $gh = hg$.

∗ Dados dos grupos G y H una función $f : G \to H$ se dice un *homomorfismo*, o *morfismo de grupos*, si para todo $g, g' \in G$ se verifica que

$$f(gg') = f(g)f(g').$$

∗ Dos grupos G y H se dicen *isomorfos* si existe un morfismo de grupos $f : G \to H$ biyectivo.

∗ Un subgrupo $H \subseteq G$ se dice *normal* si para todo $g \in G$ se cumple $H = gHg^{-1}$.

∗ Un grupo G se dice simple si los únicos subgrupos normales de G son G y $\{1\}$.

Si G es un grupo entonces se define *el centro de* G como el suconjunto de G determinado por

$$Z(G) = \{g \in G : gh = hg, \quad \text{para todo } h \in G.\}$$

Ejercicio 1.2.3. Probar que $Z(G)$ es un subgrupo de G normal. Además $Z(G/Z(G)) = \{1\}$.

Definición 1.2.4. Si G es un grupo y $g, h \in G$ denotaremos

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} \in G.$$

Al elemento $[g, h]$ se lo llama *el conmutador* de g y h. Denotaremos por $[G, G]$ al subgrupo de G generado por los conmutadores. Es decir que un elemento de $x \in [G, G]$ se escribe como un producto de conmutadores: $x = [g_1, h_1][g_2, h_2] \dots [g_m, h_m]$, para ciertos $g_i, h_i \in G$.

Lema 1.2.5. *Las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. $[G, G]$ *es un subgrupo normal de* G.
2. *El cociente* $G/[G, G]$ *es abeliano.*
3. *Denotemos por* $\pi : G \to G/[G, G]$ *la proyección canónica. Sea* $\phi : G \to H$ *es un morfismo de grupos. La imagen* $\mathrm{Im}\,(\phi)$ *es un subgrupo abeliano de* H *si y solo si existe un único morfismo* $\widehat{\phi} : G/[G, G] \to H$ *tal que* $\phi = \widehat{\phi} \circ \pi$.

1.3. EJEMPLOS. Daremos algunos ejemplos de grupos finitos que usaremos más adelante.

(1). **El grupo cíclico**. Denotaremos por $\mathbb{Z}_n$ al grupo cuyo conjunto es $\{1, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\}$. El producto de este grupo está determinado por

$$g^i g^j = g^{i+j \mod(n)}.$$

Este grupo se llama el grupo cíclico de n elementos. El inverso de un elemeto g^i es g^{n-i}. Si p es un número primo entonces el grupo $\mathbb{Z}_p$ es un grupo simple.

(2). **El grupo simétrico**. Sea X un conjunto. Denotaremos

$$\mathbb{S}_X = \{\sigma : X \to X : \sigma \text{ es biyectiva. }\}$$

Este conjunto es un grupo con la composición. Notar que si X, Y son dos conjuntos y $f : Y \to X$ es una función biyectiva entonces esta induce un isomorfismo de grupos $\widehat{f} : \mathbb{S}_X \to \mathbb{S}_Y$ definido por

$$\widehat{f}(\sigma)(y) = f^{-1}(\sigma(f(y))),$$

para todo $\sigma \in \mathbb{S}_X$, $y \in Y$. Si X es un conjunto finito de n elementos, se denotará $\mathbb{S}_X = \mathbb{S}_n$.

(3). **El grupo de cuaterniones**. Vamos a denotar por $Q_8 = \{1, -1, j, -j, k, -k, l, -l\}$ al grupo cuya multicplicación esta determinada por

$$(-1)(-1) = 1, \quad j^2 = k^2 = l^2 = -1, \quad jk = l, \quad kj = -jk.$$

Q_8 se llama el *grupo de cuaterniones* y es un grupo de orden 8 no Abeliano.

(4). Para cada cuerpo $\Bbbk$ el conjunto de elementos no nulos $\Bbbk^\times$ es un grupo con el producto del cuerpo.

(5). El subconjunto $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ que consiste de aquellos complejos de norma 1 es un subgrupo.

(6). **Algunos grupos de tipo Lie**. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $GL_n(\Bbbk)$ al grupo de matrices con coeficientes en $\Bbbk$ y determinante no nulo. Este grupo se denomina el *grupo general lineal*.

El determinante determina un morfismo de grupos $det : GL_n(\Bbbk) \to \Bbbk^\times$. El nucleo de este morfismo es un subgrupo normal de $GL_n(\Bbbk)$ que se denota $SL_n(\Bbbk)$. Es decir que $SL_n(\Bbbk) = \{A \in GL_n(\Bbbk) : det(A) = 1\}$. Este grupo se denomina el *grupo especial lineal*.

Si F_q es el cuerpo de q elementos entonces

$$|GL_n(F_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

Por lo tanto, como el morfismo $det : GL_n(F_q) \to F_q^\times$ es suryectivo, entonces $|GL_n(F_q)| = |\ker(det)||F_q^\times|$ y asi obtenemos que

$$|SL_n(F_q)| = \frac{1}{q-1} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

Por ejemlo, si p es un número primo, entonces $|SL_2(\mathbb{Z}_p)| = p\,(p^2 - 1)$.

El grupo *proyectivo especial lineal* $PSL_n(\Bbbk)$ se define como el cociente

$$SL_n(\Bbbk)/Z(SL_n(\Bbbk)).$$

En particular como $Z(SL_2(\Bbbk)) = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$, entonces

$$PSL_2(\Bbbk) = SL_2(\Bbbk)/\{Id, -\mathrm{Id}\}.$$

El *grupo ortogonal* es el subgrupo de $GL_n(\mathbb{C})$ dado por

$$O_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : AA^* = \mathrm{Id}\}.$$

Ejercicio 1.3.1. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Probar que todo subgrupo finito de $\Bbbk^{\times}$ es cíclico.

Ejercicio 1.3.2. Probar que si $n \geqq 3$ entonces $[\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n] = \mathbb{A}_n$.

Ejercicio 1.3.3. Los grupos $\mathbb{S}_4$ y $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ son isomorfos? y los grupos $\mathbb{S}_3$ y $SL_2(\mathbb{Z}_2)$?

1.4. Acciones de grupos. En esta sección estudiaremos las acciones de grupos en conjuntos. Del estudio de estas acciones deduciremos algunos resultados sobre la estructura de grupos.

Dado un conjunto X y un grupo G, una *acción* de G en X es una operación $\cdot : G \times X \to X$ tal que

- $1 \cdot x = x$,
- $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$,

para todo $x \in X$, $g, h \in G$.

Ejemplo 1.4.1. (1) Elejimos $X = G$ y la acción $G \times G \to G$ es la multiplicación a derecha, es decir $g \cdot h = gh$ para todo $g, h \in G$. Usualmente a esta acción se la denomina *acción regular a izquierda*.

(2) Tomamos $X = G$ y la acción dada por $\cdot : G \times G \to G$
$$g \cdot h = ghg^{-1},$$
para todo $g, h \in G$. Esta acción es la *acción adjunta*.

(3) Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ entonces $\mathbb{S}_n$ actua en X via
$$\cdot : \mathbb{S}_n \times X \to X, \quad \sigma \cdot x = \sigma(x),$$
para todo $\sigma \in \mathbb{S}_n, x \in X$.

(4) El grupo general lineal $GL_n(\Bbbk)$ actua en $\Bbbk^n$ por multiplicacion, es decir
$$\cdot : GL_n(\Bbbk) \times \Bbbk^n \to \Bbbk^n, \quad A \cdot v = Av.$$

(5) La acción anterior se puede restringir a la esfera. Más precisamente, hay una acción de $O_n(\mathbb{R})$ en la esfera $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_i x_i^2 = 1\}$ dada por
$$O_n(\mathbb{R}) \times S^{n-1} \to S^{n-1}, \quad A \cdot x = Ax.$$

Definición 1.4.2. Dada una acción de un grupo G en X y un elemento $x \in X$, se define *la órbita* de x
$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$
Y se define el *estabilizador* de x por
$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Lema 1.4.3. *G_x es un subgrupo de G. Además, $y \in \mathcal{O}_x$ si y solo si $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$.*

Demostración. La prueba se deja como ejercicio para el lector. □

Decimos que la acción de un grupo G es *transitiva* si existe algun $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_x = X$. En particular, el lema anterior dice que la acción es transitiva si y solo si para todo $x \in X$ $\mathcal{O}_x = X$.

Lema 1.4.4. *Sea G un grupo actuando en un conjunto X. Si $y \notin \mathcal{O}_x$ entonces $\mathcal{O}_y \cap \mathcal{O}_x = \varnothing$. Además*

$$X = \bigcup_x \mathcal{O}_x.$$

Es decir que el conjunto X se particiona en órbitas.

Ejemplo 1.4.5.

1. Si G actua sobre si mismo via la acción regular a izquierda entonces para todo $g \in G$, $\mathcal{O}_g = G$ y $G_g = \{1\}$. En este caso la acción es transitiva.
2. Si G actua sobre si mismo via conjugación entonces la órbita de un elemento $g \in G$ se la denota usualmente por $\mathcal{C}_g$ y se llama la clase de conjugación de g. En este caso el estabilizador $G_g = \{h \in G : hg = gh\}$ es *el centralizador* de g.
   Observar que $\mathcal{C}_g = \{g\}$ si y solo si $g \in Z(G)$.
3. Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ entonce $\mathbb{S}_n$ actua sobre X como se ha descripto en el ejemplo 1.4.1 (3). En este caso la acción es transitiva y si $m \in X$ su estabilizador es
$$(\mathbb{S}_n)_m = \{\sigma \in \mathbb{S}_n : \sigma(m) = m\} \simeq \mathbb{S}_{n-1}.$$

El siguiente teorema es uno de los principales resultados en el estudio de acciónes de grupos finitos. Más adelante se mostrará como tiene profundas implicancias en la estructura de grupos.

Teorema 1.4.6. *Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X. Entonces para todo $x \in X$*

$$\#\mathcal{O}_x = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

En particular el entero $\#\mathcal{O}_x$ divide a $|G|$.

Sigamos analizando en proundidad el ejemplo de un grupo actuando sobre símismo via la acción adjunta, como en el ejemplo 1.4.5. El Lema 1.4.4 implica que $G = \cup_g \mathcal{C}_g$. Pero habiamos visto que $\#\mathcal{C}_g = 1$ si y solo si $g \in Z(G)$. Entonces

$$G = Z(G) \cup \bigcup_{\#\mathcal{C}_g > 1} \mathcal{C}_g.$$

Como la unión de órbita es disjunta podemos calcular cardinales:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\#\mathcal{C}_g > 1} \#\mathcal{C}_g.$$

Esta ecuación se la denomina *ecuación de clases.*

Si G es un p-grupo, es decir que $|G| = p^n$ donde p es un número primo, entonces la ecuación de clases queda

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{\#\mathcal{C}_g > 1} \#\mathcal{C}_g.$$

Pero por el Teorema 1.4.6 sabemos que si $\#\mathcal{C}_g > 1$ entonces p divide a $\#\mathcal{C}_g$ luego debe ser que p divide a $|Z(G)|$. En particular todo p-grupo posee centro no trivial.

Ejercicio 1.4.7. Usando la ecuación de clases demostrar que todo grupo de orden p^2, p un número primo, es Abeliano.

2. Los Teoremas de Sylow

Definición 2.0.8. Si G es un grupo donde $|G| = p^n r$, p primo y $p \nmid r$, un subgrupo de Sylow de G es un subgrupo $H \subseteq G$ tal que $|H| = p^n$.

Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.0.9. *Si p es un número primo tal que $p \nmid r$ entonces p no divide a* $\binom{p^n r}{p^n}$

La demostración es un ejercicio sencillo para el lector.

Teorema 2.0.10 (Sylow)**.** *Dado un grupo G tal que $|G| = p^n r$, p primo y $p \nmid r$ entonces*

1. *Existen p-grupos de Sylow.*
2. *Si H y P son dos subgrupos de Sylow entonces existe $g \in G$ tal que $P = gHg^{-1}$.*
3. *Si δ_p es la cantidad de subgrupos de Sylow de G entonces δ_p divide a G y $\delta_p \equiv 1 (mod p)$.*

Demostración. Sea X el siguiente conjunto

$$X = \{S \subseteq G : \#S = p^n\}.$$

Observar que $\#X = \binom{p^n r}{p^n}$. El grupo G actua sobre X de la siguiente manera; si $g \in G$, $S \in X$ entonces

$$g \cdot S = \{gs : s \in S\}.$$

Supongamos que $S \in X$ y que $1 \in S$. Afirmamos que si el orden del estabilizador de S $|G_S| \geqslant p^n$ entonces S es un subgrupo de G. En efecto si $g \in G_S$ entonces $g \cdot S = S$ y como $1 \in S$ esto implica que $g \in S$, luego $G_S \subseteq S$, pero como $\#S = p^n$ por cardinalidad debe ser que $G_S = S$, es decir que S es un subgrupo.

Probemos (1). Supongamos por el absurdo que G no posee p-subgrupos de Sylow. Sea $S \in X$ y $\mathcal{O}_S$ su órbita. Podemos asumir que $1 \in S$ pues en caso contrario si $g \in S$ entonces $1 \in g^{-1} \cdot S$. Como estamos asumiendo que G no posee p-grupos de Sylow entonces S no es un grupo y por lo tanto $|G_S| < p^n$. Luego p divide a $\frac{|G|}{|G_S|} = |\mathcal{O}_S|$.

Como esto sucede para todo S y como $X = \cup_S \mathcal{O}_S$ entonces p divide a $\#X$. Pero esto es imposible por el Lema 8.0.1.

Ahora demostremos (2). Sean P y H dos p-grupos de Sylow. Sea $Y = \{gPg^{-1} : g \in G\}$ el conjunto de subgrupos de Sylow conjugados a P. El grupo G actua sobre Y via conjugación. Como $P \subseteq G_P$ entonces $\#\mathcal{O}_P = \frac{|G|}{P} = r$ no es divisible por p.

El grupo H también actua sobre Y por conjugación. Si para todo $y \in Y$ el índice $[H : H_y]$ es divisible por p, entonces $\#Y$ es divisible por p, pero vimos antes que eso no puede ser. Entonces existe un elemento $S \in Y$ tal que $[H : H_S] = 1$ y por lo tanto $H = H_S$. Esto implica que el subgrupo $S \subseteq HS$ es un grupo normal, pero como HS tiene orden p^n, debe ser que $S = HS$, luego $H \subseteq S$ pero como tienen igual cardinal debe ser que $H = S$. En otras palabras, el grupo H pertenece a Y y por lo tanto es un conjugado de P.

Si en el anterior parrafo tomamos $P = H$ obtenemos que $\{H\}$ es la única órbita de cardinal 1, luego $\delta_p - 1$ es divisible por p y asi demostramos la parte (3).

□

Ejercicio 2.0.11. Probar que todo grupo de orden 175 no puede ser simple.

3. Algunas construcciones de grupos

Una construcción básica de grupos es el producto directo. Más precisamente si G y H son dos grupos, el conjunto

$$G \times H = \{(g, x) : g \in G, x \in H\},$$

es nuevamente un grupo, donde el elemento identidad es el $(1, 1)$ y la multiplicación viene dada por

$$(g, x)(h, y) = (gh, xy),$$

para todo $g, h \in G, x, y \in H$. En las siguientes secciones mostraremos construcciones más generales de las cuales el producto directo es un caso particular.

3.1. Producto semidirecto.

Sean G y H grupos y un morfismo de grupos $\rho : H \to \mathrm{Aut}\,(G)$. Vamos a denotar el grupo $G \ltimes_\rho H$ al grupo cuyo conjunto subyacente es $G \times H$, unidad $(1, 1)$ y la multiplicación dada por

$$(g, x)(h, y) = (g\rho(x)(h), xy),$$

para todo $g, h \in G, x, y \in H$.

Lema 3.1.1. *El conjunto $G \ltimes_\rho H$ es un grupo.*

Demostración. La demostración es un simple calculo que se deja para el lector. Solamente observemos que el inverso de un elemento (g, x) es $(\rho(g^{-1})(x^{-1}), g^{-1})$.

□

Al grupo $G \ltimes_\rho H$ se lo denomina el *producto semidirecto* de G y H. Esta construcción es muy útil para construir grupos no Abelianos a partir de grupos relativamente sencillos.

Observación 3.1.2. Si $\rho : H \to \mathrm{Aut}\,(G)$ es el morfismo trivial, es decir si $\rho(h) = \mathrm{id}$ para todo $h \in H$, entonces $G \ltimes_\rho H$ coincide con el producto directo.

Observar que el subconjunto

$$G \simeq \{(g, 1) : g \in G\} \subseteq G \times H,$$

es un subgrupo **normal** de $G \ltimes_\rho H$, mientras que el subconjunto

$$H \simeq \{(1, x) : x \in H\} \subseteq G \times H,$$

es un subgrupo que solamente es normal si ρ es trivial, es decir solamente cuando $\rho(x)(g) = x$ para todo $g \in G$, $x \in H$.

Para encontrar ejemplos de productos semidiectos nos encontramos con dos obstaculos principales: el primero es encontrar cual es el grupo $\mathrm{Aut}\,(G)$ y el segundo es encontrar un morfismo de grupos de H en $\mathrm{Aut}\,(G)$.

Ejemplo 3.1.3. `El grupo Dihedral`. Sea n un número natural y ponagmos que $\mathbb{Z}_n = \{1, g, \dots, g^{n-1}\}$. Sea $\rho : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_n)$ el morfismo definido por

$$\rho(0)(g) = g, \quad \rho(1)(g) = g^{-1},$$

para todo $g \in \mathbb{Z}_n$. Como $\mathbb{Z}_n$ es abeliano es fácil probar que esta función es un morfismo de grupos. Entonces formamos el producto semidirecto $D_n = \mathbb{Z}_n \ltimes \mathbb{Z}_2$ que se denomina *el grupo Dihedral*.

Ejemplifiquemos la multiplicación:

$$(g^i, 1)(g^j, 0) = (g^{i-j}, 1).$$

Es evidente que D_n no es Abeliano.

Ejemplo 3.1.4. Vamos a encontrar un morfismo de grupos $\rho : \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$. Denotamo $\mathbb{Z}_3 = \{1, g, g^2\}$, y el grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ consta de 4 elementos; $1, a, b, ab$, donde $a^2 = b^2 = 1$, y $ab = ba$. Sea

$$\rho(g)(a) = b, \; \rho(g)(b) = ab, \; \rho(g)(ab) = a.$$

El grupo resultante $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \ltimes_\rho \mathbb{Z}_3$ es isomorfo a $\mathbb{A}_4$.

3.2. Producto semidirecto torcido. En lo que sigue construiremos una clase de productos semidirectos perturbados por un 2-cociclo.

Comenzamos con dos grupos G y H, una función $\rho : H \to \mathrm{Aut}\,(G)$ que **no** es necesariamente un morfismo de grupos, y otra función $\sigma : H \times H \to G$ tal que verifican que:

(p1) $\rho(1) = \mathrm{id}\,, \; \sigma(g, 1) = 1 = \sigma(1, g)$,
(p2) $\rho(g)(\rho(h)(x)) = \sigma(g, h)\rho(gh)(x)\sigma(g, h)^{-1}$,
(p3) $\rho(g)(\sigma(h, f))\sigma(g, hf) = \sigma(g, h)\sigma(gh, f)$,

para todo $g, h, f \in H, x \in G$.

Al conjunto $G \times H$ le damos el siguiente producto:

$$(g, x)(h, y) = (g\rho(x)(h)\sigma(x, y), xy),$$

para todo $g, h \in G, x, y \in H$. Vamos a denotar $G\,{}_\sigma\!\ltimes H$ al conjunto $G \times H$ munido con este producto.

Proposición 3.2.1. *El conjunto $G\,{}_\sigma\!\ltimes H$ es un grupo con unidad* $(1, 1)$.

La demostración es otro ejercicio para el lector.

Observación 3.2.2. Observar que si σ es trivial, es decir que si $\sigma(x, y) = 1$ para todo $x, y \in H$ entonces $G\,{}_\sigma\!\ltimes H$ coincide con el producto semidirecto $G \ltimes H$. Además el subconjunto

$$G \simeq \{(g, 1) : g \in G\} \subseteq G \times H,$$

es un subgrupo **normal** de $G\,{}_\sigma\!\ltimes H$ y el subconjunto

$$H \simeq \{(1, x) : x \in H\} \subseteq G \times H,$$

no es un subgrupo a menos que σ sea trivial.

Puede parecer que encontrar funciones σ, ρ que verifiquen los axiomas requeridos es bastante difícil. Sin embargo mostraremos que dichos ejemplos aparecen de una manera natural.

Consideremos un grupo D y un subgrupo $H \subseteq D$ normal. En lo que sigue se debe tener en mente que D es el grupo $G\,{}_{\sigma}\!\ltimes H$. Como H es normal entonces podemos formar el grupo cociente, y denotamos por $\pi : D \to D/H$ la proyección canónica.

Asumamos que $\gamma : D/H \to D$ es una sección de la proyección π, es decir que γ es una función que cumple que $\pi\gamma = \mathrm{id}$. Tal función siempre existe; una elección de γ corresponde a una elección de un conjunto de representantes de coclases de H.

Notar que posiblemente γ **no** es un morfismo de grupos. Sin perder la generalidad podemos asumir que $\gamma(\overline{1}) = 1$.

Entonces tenemos al grupo D particionado en coclases de la siguiente manera:

$$D = \bigcup_{\overline{x} \in D/H} H\gamma(\overline{x}).$$

Definimos las siguientes aplicaciones:

$$\rho : D/H \to \mathrm{Aut}\,(H), \quad \rho(\overline{x})(g) = \gamma(\overline{x})g\gamma(\overline{x})^{-1}, \tag{3.2.1}$$

$$\sigma : D/H \times D/H \to H, \quad \sigma(\overline{x}, \overline{y}) = \gamma(\overline{x})\gamma(\overline{y})\gamma(\overline{xy})^{-1}. \tag{3.2.2}$$

Supongamos que $z, w \in D$, entonces $z = g\gamma(\overline{x})$, y $w = h\gamma(\overline{y})$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} zw &= g\gamma(\overline{x})h\gamma(\overline{y}) = g\gamma(\overline{x})h\gamma(\overline{x})^{-1}\gamma(\overline{x})\gamma(\overline{y})\gamma(\overline{xy})^{-1}\gamma(\overline{xy}) \\ &= g\,\rho(\overline{x})(h)\,\sigma(\overline{x}, \overline{y})\gamma(\overline{xy}) \end{aligned}$$

Esto demuestra que $D \simeq D/H\,{}_{\sigma}\!\ltimes H$, ademas σ y ρ satisfacen los axiomas (p1), (p2) y (p3) .

La cuenta anterior nos facilita el trabajo de encontrar ejemplos.

Ejemplo 3.2.3. Consideramos el grupo aditivo $\mathbb{R}$ y el subgrupo normal $\mathbb{Z}$. El grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo $[0, 1)$ de numeros reales entre 0 y 1 con suma determinada por

$$x + y = \begin{cases} x + y & \text{si } \ x + y < 1 \\ 1 - x - y & \text{si } \ x + y \geqslant 1. \end{cases}$$

En este caso la proyección canónica $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$ es $\pi(r) = r - [r]$, donde [ ] denota la parte entera. Entonces elegir $\gamma : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = x$. Por lo tanto, usando las fórmulas (3.2.1) y (3.2.2) tenemos que

$$\rho : [0, 1) \to \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}), \quad \rho(x)(g) = \gamma(x)g\gamma(x)^{-1} = g,$$

$$\sigma : [0, 1) \times [0, 1) \to \mathbb{Z},\ \sigma(x, y) = \gamma(\overline{x})\gamma(\overline{y})\gamma(\overline{xy})^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x + y < 1 \\ 1 & \text{si } \ x + y \geqslant 1. \end{cases}$$

Por lo tanto $\mathbb{R} \simeq [0, 1)_{\sigma} \ltimes \mathbb{Z}$. Notar que aquí la acción es trivial. En general cuando el grupo D es abeliano, por (3.2.1), la acción es siempre trivial.

Ejemplo 3.2.4. Consideremos el subgrupo $H = \{1, -1, j, -j\}$ del grupo de cuaterniones Q_8. Claramente $H \simeq \mathbb{Z}_4$ y es fácil probar que es un subgrupo normal ya que tiene índice 2. Es decir $Q_8/H \simeq \mathbb{Z}_2$.

Consideremos la proyección canónica $\pi : Q_8 \to Q_8/H \simeq \mathbb{Z}_2$ y la sección $\gamma : H \to Q_8$ dada por: $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = k$. Entonces $Q_8 \simeq \mathbb{Z}_4 \ltimes_\sigma \mathbb{Z}_2$, donde la acción y σ estan determinados por

$$1 \cdot j = \gamma(1) j \gamma(1)^{-1} = -kjk = -j, \quad 1 \cdot (-j) = j,$$

$$\sigma(1,0) = \sigma(0,0) = \sigma(0,1) = 1, \quad \sigma(1,1) = \gamma(1)\gamma(1)\gamma(0)^{-1} = k^2 = -1.$$

4. Representaciones de grupos finitos

4.1. Algebras semisimples. Aquí recordaremos brevemente la noción de semisimplicidad de álgebras y algunos ejemplos. Para ello fijemos durante esta sección un cuerpo $\Bbbk$.

Definición 4.1.1. Un álgebra sobre $\Bbbk$ es un espacio vectorial A sobre $\Bbbk$ munido de un producto $\cdot : A \times A \to A$ asociativo y con unidad tal que verifica

$$\begin{aligned} a\,(b + c) &= ab + ac \\ (a + b)\,c &= ac + bc, \\ \lambda\,(ab) &= (\lambda a)\,b = a\,(\lambda b), \end{aligned}$$

para todo $a, b, c \in A$, $\lambda \in \Bbbk$.

Una *representación de* A o un A-*módulo* es un espacio vectorial V munido de una operación $\cdot : A \times V \to V$ tal que para todo $v, w \in V$, $a, b \in A$

$$\begin{aligned} (\lambda a) \cdot v &= a \cdot (\lambda v), \\ 1 \cdot v &= v, \\ (a + b) \cdot v &= a \cdot v + b \cdot v, \\ a \cdot (v + w) &= a \cdot v + a \cdot w, \\ (ab) \cdot v &= a \cdot (b \cdot v). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.2. Si V es un espacio vectorial entonces $\mathrm{End}(V)$ es un álgebra con el producto dado por la composición. Además resulta que V es una representación de $\mathrm{End}(V)$ donde la acción esta dada por la evaluación, es decir

$$\cdot : \mathrm{End}(V) \times V \to V, \quad T \cdot v \mapsto T(v).$$

Si V es una representación de A entonces la aplicación $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ definida por

$$\rho(a)(v) = a \cdot v \tag{4.1.1}$$

$a \in A$, $v \in V$, es un morfismo de álgebras. Reciprocamente si $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ es un morfismo de álgebras entonces V es una representación de A con acción dada por (4.1.1).

Definición 4.1.3. • Si V y W son dos A-módulos, *un morfismo de A-módulos* es una transformación lineal $f : V \to W$ tal que para todo $a \in A$, $v \in V$ se verifica que

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v).$$

Se denotará por $\operatorname{Hom}_A(V, W)$ al espacio de los morfismos de A-módulos entre V y W.

• Un subespacio vectorial $W \subseteq V$ se dice un *submódulo* de V si la inclusión $\iota : W \hookrightarrow V$ es un morfismo de A-módulos.

• Una representación V de A se dice *irreducible* si posee exactamente dos submódulos.

• Dos representaciones V y W se dicen *isomorfas* si existe un morfismo de A-módulos $f : V \to W$ que es biyectiva.

• Una representación $\rho : A \to \operatorname{End}(V)$ se dice *fiel* si ρ es inyectiva.

Observación 4.1.4. Si $T : V \to W$ es un morfismo de A-módulos entonces su núcleo e imagén $\ker(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ son submódulos de V y W respectivamente.

Ejercicio 4.1.5. Sea A un álgebra de dimensión finita. Si V es un A-módulo irreducible, demostrar que V es de dimensión finita.

El siguiente resultado, debido a Schur, a pesar de ser sencillo de demostrar es crucial para entender la teoría de representaciones de un álgebra.

Lema 4.1.6 (Schur). *Asumamos que $\Bbbk$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean V y W A-módulos irreducibles de dimensión finita. Entonces si $T : V \to V$ es un morfismo de A-módulos entonces existe un $\lambda \in \Bbbk$ tal que $T = \lambda \operatorname{Id}$. Además si $V \not\cong W$ entonces $\operatorname{Hom}_A(V, W) = 0$.*

Demostración. Sea $T : V \to V$ es un morfismo de A-módulos. Como $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado y V es de dimensión finita, existe $0 \neq v \in V$ un autovector de T de autovalor $\lambda \in \Bbbk$. En particular $\ker(T - \lambda \operatorname{Id}) \neq 0$. Como $\ker(T - \lambda \operatorname{Id})$ es un submódulo de V entonces $\ker(T - \lambda \operatorname{Id}) = V$, pues V es irreducible.

Ahora supongamos que $V \not\cong W$ y que existe $T : V \to W$ un morfismo de A-módulos no nulo. Como $\ker(T)$ es un submódulo de V y $T \neq 0$ entonces $\ker(T) = V$, luego T es inyectiva y por lo tanto suryectiva, ya que V y W son de dimensión finita. Luego T es un isomorfismo lo cual es una contradicción. Por lo tanto $T = 0$.

□

En otras palabras el Lema de Schur dice que

$$\operatorname{Hom}_A(V, W) = \delta_{V,W} \Bbbk,$$

donde $\delta_{V,W} = 1$ si $V \simeq W$ y $\delta_{V,W} = 0$ si V y W no son isomorfos.

El siguiente lema técnico será util más adelante. Recordemos que si V, W son espacios vectoriales, una proyección de V en W es una transformación lineal suryectiva $p : V \to W$ tal que $p^2 = p$.

Lema 4.1.7. *Sean V, W, U A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $V = W \oplus U$,

2. Existe una proyección $p : V \to W$ que es un morfismo de A-módulos.

Demostración. Veamos que 1. implica 2. Se define $p : V \to W$ por $p(w+u) = w$. Claramente p es suryectiva y $p^2 = p$. Ademas p es un morfismo de A-módulos ya que U es un A-módulo.

2. implica 1. Denotamos $U = \ker(p)$, entonces como p es una proyección $V = W \oplus U$. Como p es un morfismo de A-módulos entonces U es un A-módulo.

□

Definición 4.1.8. Un álgebra se dice *semisimple* si para todo $W \subseteq V$ un submódulo, existe otro A-módulo U tal que $V = W \oplus U$. En otras palabras, todo submódulo posee un complemento directo.

En vista del Lema 4.1.7, A es semisimple si para todo submódulo $W \subseteq V$ existe una proyección $V \to W$ que además es un morfismo de A-módulos.

Ejercicio 4.1.9. Probar que si un álgebra A como módulo sobre si misma via la representación regular es suma de submódulos simples entonces A es un álgebra semisimple.

Aplicar este resultado para probar que si A es un álgebra semisimple entonces las matrices con coeficientes en A, $M_n(A)$ es un álgebra semisimple.

Ejercicio 4.1.10. El álgebra de polinomios $\Bbbk[x]$ es semisimple? y el álgebra de polinomios de Laurent $\Bbbk[x, x^{-1}]$?

5. Representaciones lineales de grupos finitos

5.1. Álgebras de grupo. Dado un grupo G, no necesariamente finito, el *álgebra de grupo* de G es álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene por base al conjunto $\{e_g : g \in G\}$, y producto definido en los elementos de la base por

$$e_g\, e_h = e_{gh} \qquad \text{para todo } g, h \in G.$$

La unidad es e_1. Esta álgebra se denota por $\Bbbk G$.

Observación 5.1.1. Un elemento de $\Bbbk G$ es una combinación lineal **finita** de la forma $\sum_g \lambda_g e_g$ con $\lambda_g \in \Bbbk$.

Definición 5.1.2. Una *representación de G* o un *G-módulo* es un $\Bbbk G$-módulo V. En particular una representación de G es un morfismo de álgebras $\rho : \Bbbk G \to \mathrm{End}(V)$.

Una representación de G es equivalente a tener un morfismo de grupos $\widehat{\rho} : G \to GL(V)$. A veces diremos que ρ es la representación, dejando implicito al espacio vectorial V.

La acción de G en V se denotará por $g \cdot v$ o por $e_g \cdot v$ para todo $g \in G$, $v \in V$.

Si V y W son dos representaciones de G, y $t : V \to W$ es una transformación lineal, diremos que T es un morfismo de G-módulos, si T es un morfismo de $\Bbbk G$-módulos, es decir si para todo $g \in G$, $v \in V$ se verifica

$$T(g \cdot v) = g \cdot T(v).$$

Esto es equivalente a decir que, si $\rho_V : G \to GL(V)$, $\rho_W : G \to GL(W)$ son las representaciones, entonces T es un morfismo de G-módulos si y solo si

$$T \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ T,$$

para todo $g \in G$.

Definición 5.1.3. Si V es una representación de G, el *grado de* V es la dimension del espacio vectorial $\dim_{\Bbbk} V$.

Ejemplo 5.1.4. (a) **Representaciones de grado 1**. Si V es un espacio vectorial de dimension 1 entonces $GL(V) = \Bbbk^{\times}$. Entonces una representación de dimensión 1 proviene de un morfismo de grupos $\rho : G \to \Bbbk^{\times}$.

Para cualquier grupo G existe una representación de dimensión 1 distinguida $\varepsilon : G \to \Bbbk^{\times}$ llamada la *representación trivial*, determinada por $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Notar que toda representación de dimensión 1 es irreducible. Observar que si G es un grupo finito y $\rho : G \to \Bbbk^{\times}$ es un morfismo de grupos entonces $\rho(g)$ es una raiz de la unidad para todo $g \in G$, pues $g^m = 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$ lo cual implica que $\rho(g)^m = 1$.

Veamos un ejemplo concreto. Describiremos una familia de representaciones de dimensión 1 del grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$, para ello trabajaremos sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$. Para $j = 1 \dots n$ sea $\chi_j : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ el morfismo de grupos determinado por

$$\chi_j(1) = e^{\frac{2\pi i j}{n}}.$$

Cada χ_j determina una representación de dimension 1 del grupo $\mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 5.1.5. Demostrar que las representaciones χ_j, χ_l son **no** isomorfas si $j \neq l$.

(b) **La representación regular**. En este caso $V = \Bbbk G$ y la representación esta determinada por

$$\rho_r : G \to GL(V), \quad \rho_r(g)(e_h) = e_{gh},$$

para todo $g, h \in G$.

Notar que si $z = \sum_{h \in G} e_h$ entonces $\rho_r(g)(z) = z$ para todo $g \in G$. En particular el subespacio de V de dimension 1 generado por z es invariante por la acción regular. Esto nos dice que la representación regular es irreducible si y solo si $\mid G \mid = 1$.

(c) Más generalmente si X es un conjunto y $\cdot : G \times X \to X$ es una acción de G en X, denotamos por V_X al espacio vectorial sobre $\Bbbk$ con base $\{e_x : x \in X\}$. Entonces V_X es una representación de G via

$$\rho : G \to GL(V_X), \quad \rho(g)(e_x) = e_{g \cdot x},$$

para todo $g \in G, x \in X$.

(d) **La representación contragradiente**. Si V es una representación de G entonces el espacio vectorial dual $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ posee una acción de G llamada la representación contragradiente. Dicha acción esta definida por

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v), \quad g \in G, f \in V^*, v \in V.$$

Ejercicio 5.1.6. Probar que si V_X es una representación irreducible entonces la acción de G es transitiva. Vale la recíproca?

Ejercicio 5.1.7. Probar que si V es una representación irreducible de G entonces V^* con la representación contragradiente también es irreducible.

Si V y W son dos representaciones de G entonces la suma directa $V \oplus W$ y el producto tensorial $V \otimes_{\Bbbk} W$ son representaciones de G. Las acciones estan dadas por

$$g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w), g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v \otimes g \cdot w),$$

para todo $g \in G, v \in V, w \in W$.

En el siguiente resutado se analiza la semisimplicidad del álgebra de grupo. Este resultado fue obtenido por Maschke en 1888 luego generalizado para álgebras de Hopf arbitrarias. Ver [Sch].

Teorema 5.1.8. *Sea G un grupo finito. El álgebra $\Bbbk G$ es semisimple si y solo si $|G| \in \Bbbk^{\times}$.*

Demostración. Supongamos primero que $|G|$ es no nulo. Sea V una representación de G y $W \subseteq V$ un submódulo de V. Elijamos $U \subseteq V$ cualquier subespacio vectorial tal que $V = W \oplus U$, y denotemos por $\pi : V \to W$ la proyección, es decir $\pi(w + u) = w$ para todo $w \in W, u \in U$.

Sea $\widehat{\pi} : V \to W$ la aplicación definida por

$$\widehat{\pi}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v), \quad v \in V.$$

Afirmamos que

1. $\widehat{\pi}(w) = w$ para todo $w \in W$,
2. $\widehat{\pi} \circ \widehat{\pi} = \widehat{\pi}$,
3. $\widehat{\pi}(h \cdot v) = h \cdot \widehat{\pi}(v)$ para todo $v \in V$, $h \in G$.

Sea $w \in W$ entonces para todo $g \in G$ $g^{-1} \cdot w \in W$ pues W es un submódulo de V, luego $\pi(g^{-1} \cdot w) = g^{-1} \cdot w$. Entonces

$$\widehat{\pi}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (g^{-1} \cdot w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = \frac{|G|}{|G|} w = w.$$

Y asi demostramos (1). (2) sigue de (1) ya que $\widehat{\pi}(v) \in W$ para todo $v \in V$. Probemos (3). Sean $v \in V$, $h \in G$ entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}(h \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg \cdot \pi((hg)^{-1} h \cdot v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg \cdot \pi((g)^{-1} \cdot v) = h \cdot \widehat{\pi}(v). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\Bbbk G$ es semisimple. Ahora supongamos que $\Bbbk G$ es semisimple y demostremos que $|G|$ es no nulo. Consideremos el morfismo $\varepsilon : \Bbbk G \to \Bbbk$, $\varepsilon(e_g) = 1$ para todo $g \in G$. Claramente ε es un morfismo de $\Bbbk G$-módulos donde la acción de G en $\Bbbk G$ es la regular y la acción de G en $\Bbbk$ es la trivial, es decir $g \cdot r = r$ para todo $g \in G$, $r \in \Bbbk$.

En particular $\ker(\varepsilon) \subseteq \Bbbk G$ es un submódulo. Como $\Bbbk G$ es semisimple entonces existe un submódulo $U \subseteq \Bbbk G$ necesariamente de dimension 1 tal que $\Bbbk G = \ker(\varepsilon) \oplus U$. Sea $\Lambda \in U$ un elemento no nulo. Como $\Lambda \notin \ker(\varepsilon)$ podemos suponer que $\varepsilon(\Lambda) = 1$.

Como U es un submódulo entonces para cada $g \in G$ existe un $\lambda_g \in \Bbbk$ tal que $e_g\Lambda = \lambda_g \Lambda$. Aplicando ε a ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$1 = \varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(e_g\Lambda) = \varepsilon(\lambda_g\Lambda) = \lambda_g\varepsilon(\Lambda) = \lambda_g.$$

Luego, $e_g\Lambda = \Lambda$ para todo $g \in G$. Asumamos que $\Lambda = \sum_{h\in G} r_h e_h$, con $r_h \in \Bbbk$. Entonces

$$e_g\Lambda = \sum_{h\in G} r_h e_{gh} = \sum_{h\in G} r_h e_h = \Lambda.$$

Como el conjunto $\{e_g\}_{g\in G}$ es una base, se deduce que $r_h = r_{gh}$ para todo $g, h \in G$. Esto nos dice que todos los r_g son iguales. Pongamos $r = r_g$ para todo $g \in G$. Entonces $\Lambda = r\sum_{h\in G} e_h$. Aplicando ε obtenemos que

$$1 = \varepsilon(\Lambda) = r\sum_{h\in G} \varepsilon(e_h) = r|G|,$$

y asi demostramos que $|G|$ es inversible. □

Como consecuencia del Teorema anterior se tiene que las álgebras $\Bbbk G$ son semisimples para cualquier grupo finito G y cualquier cuerpo $\Bbbk$ de caracteristica cero.

Ejercicio 5.1.9. Probar que si G es un grupo infinito y $\Lambda \in \Bbbk G$ es un elemento tal que verifica que $e_g\Lambda = \Lambda$ para todo $g \in G$ entonces $\Lambda = 0$. Usando esto probar que si G es un grupo infinito entonces $\Bbbk G$ **no** es semisimple.

En particular el álgebra de polinomios de Laurent $\Bbbk[x, x^{-1}]$ no es semisimple, pues existe un isomorfismo de álgebras $\Bbbk[x, x^{-1}] \simeq \Bbbk\mathbb{Z}$.

Como consecuencia del Lema de Schur se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.1.10. *Asumamos que $\Bbbk$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Si G es un grupo finito abeliano entonces toda representación irreducible es de grado 1.*

Demostración. Sea V una representación de G irreducible. Para cada $g \in G$ denotamos por $L_g : V \to V$ la transformación lineal definida por $L_g(w) = g \cdot w$ para todo $w \in V$. Como G es abeliano L_g es un morfismo que respeta la acción de G:

$$L_g(h \cdot w) = g \cdot (h \cdot w) = gh \cdot w = hg \cdot w = h \cdot L_g(w),$$

para todo $h \in G$, $w \in V$. Luego, por el Lema 4.1.6 existe un $c \in \Bbbk$ tal que $L_g = c\,\mathrm{Id}$. Entonces si $0 \neq v \in V$, $g \cdot v = c\, v$ para todo $g \in G$. Es decir que el subespacio de dimensión 1 generado por v es un submódulo de V, luego $V =< v >$, pues V es irreducible. □

Como consecuencia de la Proposición 5.1.10 se tiene que las representaciones $\{\chi_j\}_{j=1}^n$ de $\mathbb{Z}_n$ definidas en el ejemplo 5.1.4 (a) forman un conjunto completo de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles.

Más adelante probaremos que si toda representación irreducible de un grupo es de grado 1 entonces el grupo es necesariamente abeliano. Este será nuestro primer resultado de estructura de un grupo que se puede "leer"de la teoría de representaciones.

Ejemplo 5.1.11. Consideremos el grupo cíclico de 4 elementos $\mathbb{Z}_4 = \{1, g, g^2, g^3\}$. Definamos $\rho : \mathbb{Z}_4 \to GL_2(\mathbb{R})$ la representación determinada por

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Está acción está bien definida pues la matriz $\rho(g)^4 = \mathrm{Id}$. Es decir que estamos definiendo una acción en $\mathbb{R}^2$ determinada por

$$g \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix},$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Afirmamos que esta representación es irreducible, en efecto si no lo fuera debería existir un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^2$ que es estable bajo la acción de $\mathbb{Z}_4$, es decir que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $g \cdot v = \lambda\, v$. Luego si $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ entonces $b = \lambda\, a, -a = \lambda\, b$. Por lo tanto como $v \neq 0$, $\lambda^2 = -1$ lo cual es absurdo. Así hemos demostrado que $\mathbb{Z}_4$ posee una representación irreducible de grado 2. Este ejemplo **no** contradice la Proposición 5.1.10 pues aquí estamos utilizando el cuerpo de los números reales que **no** es algebraicamente cerrado.

5.2. Teoría de Caracteres. De ahora en más trabajaremos con el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Nos dedicaremos a estudiar los caracteres de grupos finitos, una herramienta crucial para el estudio representaciones.

Definición 5.2.1. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de dimensión finita de G. El *caracter asociado a* ρ es la función $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\chi_\rho(g) = tr(\rho(g)), \quad g \in G.$$

A veces denotaremos χ_V al caracter asociado a la representación V.

En principio, el paso de la representación ρ a su caracter χ_ρ hay una perdida de información sobre la representación ya que solo estamos viendo los elementos que aparecen en la diagonal de las matrices $\rho(g)$. Más adelante veremos que esta apreciación inicial no es correcta. Más especificamente demostraremos que el caracter de una representación la determina por completo.

Lema 5.2.2. *Sea ρ una rerpesentación de grado n y χ su caracter. Entonces:*

(i) $\chi(1) = n$,
(ii) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ *para todo* $g \in G$,
(iii) $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$ *para todo* $g, h \in G$.

La demostración de este lema queda como ejercicio.

Lema 5.2.3. *Sean V y W dos representaciones de G de dimensión finita.*

(i) *Si* $V \simeq W$ *entonces* $\chi_V = \chi_W$.
(ii) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.
(iii) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$, $\chi_{V \otimes W} = \chi_V\, \chi_W$.

Demostración. (i). Sea $\phi : V \to W$ un isomorfismo de G-módulos, entonces

$$\phi \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ \phi,$$

para todo $g \in G$. Luego $\rho_V(g) = \phi^{-1} \circ \rho_W(g) \circ \phi$ y por lo tanto

$$\chi_V(g) = tr(\rho_V(g)) = tr(\phi^{-1} \circ \rho_W(g) \circ \phi) = tr(\rho_W(g)) = \chi_W(g),$$

para todo $g \in G$.

(ii). Sea $\{v_i\}$ un base de V y $\{f_i\}$ base dual en V^*, es decir que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Asumamos que $g \cdot v_i = \sum_k A_{ki}(g)\, v_k$, es decir que la matriz de $\rho_V(g)$ en la base $\{v_i\}$ es $(A_{ij}(g))$.

Entonces

$$\begin{aligned} g \cdot f_i &= \sum_k (g \cdot f_i)(v_k)\, f_k = \sum_k f_i(g^{-1} \cdot v_k)\, f_k \\ &= \sum_k \sum_l A_{lk}(g^{-1}) f_i(v_l)\, f_k = \sum_k A_{ik}(g^{-1})\, f_k. \end{aligned}$$

Es conclusion, la matriz de la representación conatragradiente $\rho_{V^*}(g)$ en la base $\{f_i\}$ es la transpuesta de la matriz $(A_{ij}(g^{-1}))$: $[\rho_{V^*}(g)] = [\rho_V(g^{-1})]^t$. En particular

$$\chi_{V^*}(g) = tr([\rho_{V^*}(g)]) = tr([\rho_V(g^{-1})]^t) = tr([\rho_V(g^{-1})]) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}.$$

La ultima igualdad se debe al Lema 5.2.2 (ii).

□

El siguiente resultado, consecuencia directa del Lema de Schur, resultará util para demostrar ciertas propiedades importantes sobre los caracteres de representaciones irreducibles.

Corolario 5.2.4. *Sean $\rho_V : G \to GL(V)$, $\rho_W : G \to GL(W)$ dos representaciones irreducibles de G, y sea $\phi : V \to W$ una transformación lineal. Definimos $\widehat{\phi} : V \to W$ por*

$$\widehat{\phi}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \phi(g \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_W(g^{-1}) \circ \phi \circ \rho_V(g)(v).$$

Si $V \ncong W$ entonces $\widehat{\phi} = 0$. Si $V = W$ entonces $\widehat{\phi} = \frac{tr(\phi)}{\dim V} \operatorname{Id}$.

Demostración. Primero probaremos que $\widehat{\phi}$ respeta la acción de G. Sean $v \in V, h \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(h \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \phi(gh \cdot v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gh^{-1})^{-1} \cdot \phi(g \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg^{-1} \cdot \phi(g \cdot v) = h \cdot \widehat{\phi}(v). \end{aligned}$$

La segunda igualda se debe a que estamos cambiando el índice de la sumatoria $g \mapsto gh^{-1}$.

Asumamos que $V \ncong W$, como V y W son irreducibles, el Lema 4.1.6 implica que $\widehat{\phi} = 0$. Si $V = W$, nuevamente, el Lema 4.1.6 implica que existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que $\widehat{\phi} = c\,\mathrm{Id}$. Para calcular cuanto es c, tomamos traza a ambos lados de esta ecuación:

$$c \dim V = tr(\widehat{\phi}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} tr(\rho_V(g^{-1}) \circ \phi \circ \rho_V(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} tr(\phi) = tr(\phi).$$

Luego $c = \frac{tr(\phi)}{\dim V}$, lo cual concluye la demostración de este corolario. □

En lo que sigue escribiremos este resultado pero en forma matricial lo cual será provechoso más adelante. Asumamos que para todo $g \in G$

$$\rho_V(g) = (A_{ij}(g)), \quad \rho_W(g) = (B_{ij}(g)),$$

Además supongamos que

$$\phi = (C_{ij}), \quad \widehat{\phi} = (D_{ij}).$$

Escribiendo la definición de $\widehat{\phi}$ en forma matricial obtenemos que

$$D = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} B(g^{-1})CA(g),$$

entonces para cada i, j

$$D_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k,l} B_{ik}(g^{-1})\, C_{kl}\, A_{lj}(g). \tag{5.2.1}$$

En el caso que $V \ncong W$, $\widehat{\phi} = 0$ por lo tanto

$$0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k,l} B_{ik}(g^{-1})\, C_{kl}\, A_{lj}(g).$$

Recordemos que la matriz C es arbitraria, por lo tanto para cada k, l fijo pero arbitrario podemos elegir la matriz C como $C_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Entonces la igualdad anterior implica que

$$0 = \sum_{g\in G} B_{ik}(g^{-1})\, A_{lj}(g), \tag{5.2.2}$$

para todo i, j, k, l. En el caso que $V = W$, es decir $A = B$, el Corolario 5.2.4 implica que $D = \dfrac{tr(C)}{\dim V} I$, luego

$$D_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum_{k} C_{kk} = \frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum_{k,l} \delta_{kl} C_{kl}.$$

En este caso la igualdad (5.2.2) queda como

$$\frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum_{k,l}\delta_{kl}C_{kl} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k,l} A_{ik}(g^{-1})\, C_{kl}\, A_{lj}(g).$$

Nuevamente usando el mismo argumento anterior que la matriz C es arbitraria se obtiene que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} A_{ik}(g^{-1})\,A_{lj}(g) = \frac{1}{\dim V}\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{5.2.3}$$

5.3. Relaciones de ortogonalidad para caracteres. Fijemos primero una notación. Para cada par de funciones χ, χ' de G a valores complejos vamos a denotar

$$< \chi, \chi' >= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g)\overline{\chi'(g)}. \tag{5.3.1}$$

Es evidente que $<,>$ es un producto interno, es decir es lineal en la primer variable, sesquilineal en la segunda y $< \chi, \chi' > \geqslant 0$ para todo $\chi : G \to \mathbb{C}$ donde la igualdad se da si y solo si $\chi = 0$.

Los cálculos de la sección anterior nos van a permitir demostrar que los caracteres de representaciones irreducibles con ortonormales.

Teorema 5.3.1. *Sean χ_V, χ_W caracteres correspondientes a dos representaciones V y W de G irreducibles no isomorfas. Entonces*

$$< \chi_V, \chi_W >= 0, \quad < \chi_V, \chi_V >= 1.$$

Demostración. Sean $\rho_V \to GL(V)$, $\rho_W \to GL(W)$ las representaciones y sean $\rho_V(g) = (A_{ij}(g))$, $\rho_W(g) = (B_{ij}(g))$. Entonces $\chi_V(g) = \sum_i A_{ii}(g), \chi_W(g) = \sum_i B_{ii}(g)$. Luego

$$\begin{aligned} < \chi_V, \chi_V > &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)\,\overline{\chi_V(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)\,\chi_V(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i,j} A_{ii}(g)A_{jj}(g^{-1}) = \sum_{i,j} \frac{1}{\dim V}\delta_{ij} = 1 \end{aligned}$$

La cuarta igualdad se deduce de (5.2.3). Análogamente usando (5.2.2) se prueba que $< \chi_V, \chi_W >= 0$. □

Hasta el final de esta sección fijaremos la siguiente notación. Vamos a denotar por $\{V_1, \dots V_s\}$ al conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles. Para cada $i = 1 \dots s$ denotamos $\chi_i = \chi_{V_i}$, y $m_i = \dim V_i$.

Una consecuencia de la ortogonalidad de caracteres será que el caracter de una representación la determina por completo. Primero veamos el siguiente resultado.

Corolario 5.3.2. *Sea W una representación con una descomposición en irreducibles:*

$$W = \oplus_i V_i^{a_i}.$$

Si χ_W es el caracter de W entonces se tiene que $a_i =< \chi_W, \chi_i >$, para todo $i = 1 \dots s$.

Demostración. Como $W = \oplus_i V_i^{a_i}$, entonces $\chi_W = \sum_j a_j\chi_j$, luego

$$< \chi_W, \chi_i >= \sum_j a_j < \chi_j, \chi_i >= a_i.$$

La ultima igualdad se debe a que $< \chi_j, \chi_i >= \delta_{ij}$. □

En otras palabras, el Corolario 5.3.2 nos dice que la cantidad de veces que aparece una representación V adentro de otra W es el entero $< \chi_W, \chi_V >$.

Corolario 5.3.3. *Si V y W son dos representaciones de G de dimensión finita tales que $\chi_W = \chi_V$ entonces $V \simeq W$.*

Demostración. Desconpongamos a los espacios V y W en sumas de irreducibles:

$$V = \oplus_i V_i^{a_i}, \quad W = \oplus_i V_i^{b_i}.$$

Entonces sabemos por el Corolario 5.3.2 que para todo i

$$a_i =< \chi_V, \chi_i >=< \chi_W, \chi_i >= b_i.$$

Por lo tanto $V \simeq W$.

□

Corolario 5.3.4. *Si V y W son dos representaciones de G de dimensión finita entonces*

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) =< \chi_V, \chi_W > .$$

Demostración. Análogamente a la demostración anterior descomponemos los espacios V y W en suma de irreducibles $V = \oplus_i V_i^{a_i}, \quad W = \oplus_j V_j^{b_j}$. Entonces tenemos que

$$\operatorname{Hom}_G(V, W) \simeq \operatorname{Hom}_G(\bigoplus_i V_i^{a_i}, \bigoplus_j V_j^{b_j}) \simeq \bigoplus_{i,j} \operatorname{Hom}_G(V_i, V_j)^{a_i b_j} \simeq$$
$$\simeq \bigoplus_{i,j} \delta_{ij}\, a_i b_j\, \Bbbk \simeq \bigoplus_i a_i b_i\, \Bbbk.$$

El tercer isomorfismo se debe al lema de Schur. Luego

$$\dim(\operatorname{Hom}_G(V, W)) = \sum_i a_i b_i =< \chi_V, \chi_W > .$$

□

Como otra consecuencia se tiene la siguiente caracterización de las representaciones irreducibles en términos de sus caracteres.

Corolario 5.3.5. *V es una representación irreducible de G si y solo si $< \chi_V, \chi_V >= 1$*

Demostración. Supongamos que $< \chi_V, \chi_V >= 1$, y sea $V = \oplus_i V_i^{a_i}$ la descomposición de V en irreducibles. Entonces

$$1 =< \chi_V, \chi_V >= \sum_{i,j} a_i a_j < \chi_i, \chi_j >= \sum_{i,j} a_i a_j\, \delta ij = \sum_{i,j} a_i^2.$$

Como a_i son enteros, la única forma de que esto sea posible es que $a_i = 0$ para todo i salvo para un j tal que $a_j = 1$. Luego $V = V_j$ y así V es irreducible. □

Si V es una representación irreducible también lo es V^* con la representación contragradiente (ver Ejemplo 5.1.4 (d)). En efecto, si χ_{V^*} es el caracter de V^* entonces

$$\begin{aligned} < \chi_{V^*}, \chi_{V^*} > &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{V^*}(g)\overline{\chi_{V^*}(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{V^*}(g)\overline{\chi_{V^*}(g)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\chi_V(g) =< \chi_V, \chi_V >= 1. \end{aligned}$$

La tercera igualdad por el Lema 5.2.3 (ii).

Consideremos $R_G : G \to GL(\mathbb{C}G)$ la representación regular, es decir que para todo $g, h \in G$

$$R_G(g)(e_h) = e_{gh}.$$

Sea r_G el caracter de la representación regular. Un cálculo directo demuestra que

$$r_G(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ |G| & \text{si } g = 1. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Como resultado de este cálculo tenemos que

Lema 5.3.6. $\mathbb{C}G = \oplus_{i=1}^{s} V_i^{m_i}$.

Demostración. Para cada $i = 1 \dots s$, tenemos que

$$< r_G, \chi_i >= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_G(g)\overline{\chi_i(g)} = \chi_i(1) = m_i.$$

La segunda igualdad por (5.3.2). Luego la demostración concluye usando el Corolario 5.3.2. □

Como consecuencia de la descomposición de $\mathbb{C}G$ en sus componentes irreducibles tenemos que:

$$r_G = \sum_{i=1}^{s} m_i\, \chi_i.$$

Evaluando esta igualdad y usando (5.3.2) se tiene que

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} m_i^2, \qquad 0 = \sum_{i=1}^{s} m_i\, \chi_i(g) \text{ si } g \neq 1. \tag{5.3.3}$$

La primera igualdad será de extrema utilidad cuando busquemos todas las representaciones irreducibles de un grupo. Es decir, si encontramos una familia de representaciones cuyos cuadrados de sus dimensiones suman a $|G|$ entonces esto implica que debe ser todas.

En lo que sigue nos encaminaremos a demostrar que la cantidad de representaciones irreducibles de G es igual a la cantidad de clases de conjugación de G. Para ello introduciremos las funciones de clase.

Definición 5.3.7. Una función $f : G \to \mathbb{C}$ se dice una *función de clase* si para todo $g, h \in G$ se cumple que $f(hgh^{-1}) = f(g)$.

En otras palabras si $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{l}$ es el conjunto de clases de conjugación de G entonces una función de clase queda determinada por l valores: $f(\mathcal{C}_i)$ para $i = 1 \dots l$.

Por ejemplo todo caracter de una representación es una función de clase gracias al Lema 5.2.2 (iii). Más aun, cualquier combinación lineal de caracteres es una función de clase.

Definamos $\mathcal{H} = \{f : G \to \mathbb{C} : f$ es una función de clase$\}$. Claramente $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de manera obvia. Este espacio vectorial está munido de un producto interno, el que definimos en (5.3.1).

Como cada función de clase queda determinada por l valores entonces se tiene que $\dim \mathcal{H} = l$. Como $\{\chi_i\}_{i=1}^{s} \subseteq \mathcal{H}$ y los χ_i son ortonormales, en particular son linealmente independientes, esto nos dice que $s \leq l$. En lo que sigue demostraremos que de hecho los caracteres de las representaciones irreducibles de G forman una base de $\mathcal{H}$, esto probará que $s = l$, es decir que la cantidad de representaciones irreducibles de un grupo es igual a la cantidad de clases de conjugación.

Para lograr esta meta probemos primero el siguiente lema que será útil.

Lema 5.3.8. *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación irreducible de caracter χ y sea $f \in \mathcal{H}$. Definamos $\rho_f : V \to V$ la función*

$$\rho_f(v) = \sum_{g \in G} f(g)\, g \cdot v,$$

para todo $v \in V$. Entonces $\rho_f = \dfrac{|G|}{\dim V} < f, \overline{\chi} > \mathrm{Id}$.

Demostración. La prueba consiste en una consecuencia inmediata del Lema de Schur. Probemos primero que ρ_f respeta la acción de G. sea $h \in G, v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \rho_f(h \cdot v) &= \sum_{g \in G} f(g)\, gh \cdot v = \sum_{g \in G} f(hgh^{-1})\, hgh^{-1}h \cdot v \\ &= \sum_{g \in G} f(g)\, hg \cdot v = h \cdot \rho_f(v). \end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos cambiado el indice de la sumatoria de g a hgh^{-1}, la tercera igualdad se debe a que f es una función de clase. Luego como V es irreducible, el Lema de Schur implica que $\rho_f = c\,\mathrm{Id}$ para algun $c \in \mathbb{C}$. Para determinar a c calculemos la traza de ρ_f :

$$c \dim V = tr(\rho_f) = \sum_{g \in G} f(g)\, tr(\rho(g)) = \sum_{g \in G} f(g)\, \chi(g) = |G| < f, \overline{\chi} > .$$

$\square$

Teorema 5.3.9. *Los caracteres* $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ *forman una base de* $\mathcal{H}$.

Demostración. Asumamos que el espacio generado por $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ no es igual a $\mathcal{H}$, entonces podemos asegurar que existe un $f \in \mathcal{H}$ tal que $f \neq 0$ y que $< f, \chi_i >= 0$ para todo $i = 1 \dots s$.

Luego la transformación asociada ρ_f es igual a cero, por el Lema 5.3.8, para cualquier representación irreducible V. Pero como toda representación es suma de irreducibles, luego $\rho_f = 0$ cualquiera sea V. En particular si elegimos $V = \mathbb{C}G$ con la representación regular. Esto nos dice que:

$$0 = \rho_f(e_1) = \sum_{g \in G} f(g) R_G(g)(e_1) = \sum_{g \in G} f(g)\, e_g.$$

Debido a que $\{e_g\}_{g \in G}$ es una base, entonces $f(g) = 0$ para todo $g \in G$, luego $f = 0$. Lo cual nos lleva a una contradicción. □

El siguiente resultado es nuestro primer teorema de estructura del grupo que podemos "ver" de sus representaciones.

Proposición 5.3.10. *Sea* G *un grupo finito tal que* $m_i = 1$ *para todo* $i = 1 \dots s$. *Entonces* G *es Abeliano.*

Demostración. Por (5.3.3) tenemos que

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} m_i^2 = \sum_{i=1}^{s} 1 = s.$$

Como s es la cantidad de clases de conjugación de G debe ser que para todo $g \in G$, $\mathcal{C}_g = \{g\}$, entonces G es Abeliano. □

5.4. Representaciones de grado 1.

Dado G grupo finito vamos a denotar

$$\widehat{G}_1 = \{\chi : G \to \mathbb{C}^{\times},\ \text{morfismo de grupos}\ \}.$$

Es decir que $\widehat{G}_1$ es el conjunto de representaciones de grado 1 de G. Para cada $\chi, \psi \in \widehat{G}_1$ definimos el producto $\chi\psi$, por $(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g)$ para todo $g \in G$. Claramente $\chi\psi \in \widehat{G}_1$. En particular si G es un grupo Abeliano entonces $\widehat{G} = \widehat{G}_1$.

Proposición 5.4.1. *Con el producto definido anteriormente* $\widehat{G}_1$*es un grupo.*

Demostración. La demostración es sencilla y es dejada como ejercicio para el lector. Aclaremos, sin embargo, que el inverso de un elemento $\chi \in \widehat{G}_1$ es $\overline{\chi}$. Es decir que el inverso de una representación dada por χ es la representación contragradiente. □

Lema 5.4.2. *Si* A *es un grupo abeliano, entonces* $|A| = |\widehat{A}_1|$.

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 5.3.9.

□

Teorema 5.4.3. $|\widehat{G}_1| = |G/[G, G]|$. *En particular* $|\widehat{G}_1|$ *divide al orden de* G.

Demostración. Sea $\rho : G \to \mathbb{C}^{\times}$ una representación de grado 1. Como $\rho(G)$ es abeliano, por el Lema 1.2.5 (3) existe un único morfismo de grupos $\widehat{\rho} : G/[G,G] \to \mathbb{C}^{\times}$ tal que $\widehat{\rho} \circ \pi = \rho$, donde $\pi : G \to G/[G,G]$ es la proyección canónica. Esto nos establece una correspondencia $\widehat{G}_1 \leftrightsquigarrow \widehat{G/[G,G]}_1$, entre las representaciones de grado 1 de G y de $G/[G,G]$. Luego $|\widehat{G}_1| = |\widehat{G/[G,G]}_1|$. Como el grupo $G/[G,G]$ es Abeliano, Lema 1.2.5 (2), usando el Lema 5.4.2 tenemos que $|\widehat{G}_1| = |G/[G,G]|$. □

Ejemplo 5.4.4. Probar que $\mathbb{S}_n$, $n \geq 3$, posee solo dos representaciones no isomorfas de grado 1. En efecto basta con demostrar que $[\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n] = \mathbb{A}_n$.

Como consecuencia inmediata del Teorema anterior tenemos el siguiente resultado

Proposición 5.4.5. *Si G es un grupo simple no Abeliano entonces la representación trivial es la única representación de grado 1.*

Sea A un grupo abeliano. Para cada $a \in A$ definimos un morfismo de grupos

$$\xi_a : \widehat{A} \to \mathbb{C}^{\times}, \quad \xi_a(\chi) = \chi(a), \quad \text{para todo } \chi \in \widehat{A}.$$

Claramente ξ_a es una representación de grado 1 de $\widehat{A}$, es decir $\xi_a \in \widehat{\widehat{A}}$. Esto implica la siguiente Proposición.

Proposición 5.4.6. *La aplicación $\xi : A \to \widehat{\widehat{A}}$, $\xi(a) = \xi_a$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Es inmediato comprobar que ξ es un morfismo de grupos. Probemos que es inyectiva. Asumamos por el contrario que ξ no es inyectiva, luego existe un $1 \neq a \in A$ tal que $\xi(a) = 1$ entonces $\xi_a : \widehat{A} \to \mathbb{C}^{\times}$ es el morfismo trivial, es decir

$$\xi_a(\chi) = 1, \quad \text{para todo } \chi \in \widehat{A}.$$

Luego $\chi(a) = 1$ para todo $\chi \in \widehat{A}$. Como $1 \neq a$ la segunda ecuación de (5.3.3) nos dice que

$$0 = \sum_{i=1}^{s} m_i \, \chi_i(a) = \sum_{i=1}^{s} m_i,$$

lo cual es absurdo pues $m_i > 0$ para todo $i = 1 \ldots S$.. □

Si tenemos dos grupos F y G, y un morfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{Aut}(F)$ podemos construir el producto semidirecto $D = F \ltimes G$. En lo siguiente mostraremos como construir representaciones de grado 1 de D a partir de representaciones de grado 1 de G.

Proposición 5.4.7. *Sea $\chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$ un morfismo de grupos. Sea $\widetilde{\chi} : F \ltimes G \to \mathbb{C}^{\times}$ definido por*

$$\widetilde{\chi}(x, g) = \chi(g),$$

para todo $x \in F, g \in G$. Entonces $\widetilde{\chi}$ es un morfismo de grupos.

Demostración. □

Ejercicio 5.4.8. Sea H un grupo finito y $\alpha : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}\,(H)$ un morfismo de grupos. consideramos el producto semidirecto $G = H \ltimes_\alpha \mathbb{Z}_2$. El producto es

$$(h,x)(g,y) = (h\alpha(x)(g), xy), \quad x,y \in \mathbb{Z}_2, h,g \in H.$$

Sea $\rho : H \to GL(V)$ una rerpesentación de H. Denotamos $\rho_\alpha : H \to GL(V)$ la representación de H dada por:

$$\rho_\alpha(h)(v) = \rho(\alpha(1)(h))(v), \quad h \in H, v \in V.$$

Denotamos V_α al espacio V con esta representación.

(a) Demostrar que si $W \subseteq V$ es una subrepresentación entonces $W_\alpha \subseteq V_\alpha$.
(b) Demostrar que $(V_\alpha)_\alpha \simeq V$.
(c) Demostrar que si V es una representación irreducible entonces V_α también lo es.
(d) Definimos una representación de G en el espacio vectorial $V \oplus V$ por

$$\widehat{\rho}(h,0) = \begin{pmatrix} \rho(h) & 0 \\ 0 & \rho_\alpha(h) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\rho}(h,1) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(h) \\ \rho_\alpha(h) & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que en efecto esto define una representación de G y que si $V \not\simeq V_\alpha$ entonces $\widehat{\rho}$ es irreducible.

5.5. Cotas para las dimensiones de representaciones irreducibles. Usando los resultados que hemos demostrado hasta ahora podremos mostrar un par de cotas superiores para las representaciones irreducibles. Estos resultados serán de mucha utilidad cuando uno quiere determinar todas las dimensiones de representaciones irreducibles de un grupo.
.

Proposición 5.5.1. *Sea $A \subseteq G$ un grupo abeliano, $|A| = m$, $|G| = n$. Si V es una representación irreducible de G entonces* $\dim V \leq \frac{n}{m}$

Demostración. El espacio V es una repersentación de A restringiendo la acción de G. V no es necesariamente irreducible como A-módulo. Sea $W \subseteq V$ una representación irreducible de A. Entonces $\dim W = 1$. Definamos

$$\widetilde{V} = \sum_{g \in G} g \cdot W \subseteq V. \tag{5.5.1}$$

Claramente $\widetilde{V}$ es un G-módulo, pero como $W \subseteq \widetilde{V}$ entonces $\widetilde{V} \neq 0$. Por ser V irreducible $V = \widetilde{V}$. Sea $G = \bigcup_{i=1}^{l} x_i A$ una descomposición de G en coclases de A. Como $x_i A \cdot W = x_i \cdot W$, la suma (5.5.1) queda se puede escribi como

$$\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot W.$$

□

Observar que es posible que $x_i \cdot W = x_j \cdot W$ para distintos i,j. De cualquier manera

$$\dim V = \dim \widetilde{V} \leq \sum_{i=1}^{l} \dim(x_i \cdot W) = l \dim W = l = \frac{n}{m}.$$

Ejemplo 5.5.2. El grupo Dihedral $D_n = \mathbb{Z}_n \ltimes \mathbb{Z}_2$ tiene como subgrupo a $\mathbb{Z}_n$, que es Abeliano. Por lo tanto si V es una representación irreducible de D_n, la Proposición 5.5.1 implica que $\dim V \leq 2$.

Proposición 5.5.3. *Si $c = Z(G)$, $|G| = n$ y V es una representación irreducible de G entonces* $\dim V \leq \sqrt{\frac{n}{c}}$.

Demostración. Sea χ el caracter de V. Para cada $z \in Z(G)$ la transformación lineal $\rho(z) : V \to V$ es un morfismo de G-módulos. En efecto si $v \in V, g \in G$ entonce

$$\rho(z)(g \cdot v) = zg \cdot v = gz \cdot v = g \cdot \rho(z)(v).$$

Luego, por el Lema de Schur se tiene que existe un escalar $\lambda_z \in Z(G)$ tal que $\rho(z) = \lambda_z \operatorname{Id}$. □

Como $\rho(z)\rho(z^{-1}) = \operatorname{Id}$, entonces $\lambda_{z^{-1}} = \lambda_z^{-1}$. Además $\chi(z) = \lambda_z \dim V$. Usando el Teorema 5.3.1 se tiene que

$$1 =< \chi, \chi >= \sum_{g \in G} \chi(g)\chi(g^{-1}) \geq \sum_{z \in Z(G)} \chi(z)\chi(z^{-1}) = \sum_{z \in Z(G)} \lambda_z \lambda_z^{-1} (\dim V)^2 = c(\dim V)^2.$$

Lo cual concluye la demostración.

Ejemplo 5.5.4. Consideramos el grupo $GL_2(\mathbb{Z}_p)$, p un número natural primo. El subgrupo de matrices diagonales inversibles es un subgrupo del centro de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ de orden $(p-1)^2$. Por lo tanto si V es una representación irreducible de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ tenemos que

$$\dim V \leq \sqrt{\frac{p(p-1)(p^2-1)}{(p-1)^2}} = \sqrt{(p+1)p} < p + 1.$$

En particular, las dimensiones posibles de las representaciones irreducibles de $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ son 1, 2 o 3.

Veamos algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 5.5.5. Consideremos primero el grupo dihedreal $D_3 = \mathbb{Z}_3 \ltimes \mathbb{Z}_2$. Este grupo esta generado por dos elementos g, ξ sujeto a las relaciones

$$g^3 = 1, \;\; \xi^2 = 1, \;\; \xi g = g^2 \xi.$$

es fácil demostrar que D_3 posee tres clases de conjugación: $\{1\}, \{g, g^2\}$ y $\{\xi, g\xi, g^2\xi\}$. Entonces D_3 posee tres representaciones irreducibles. Observar ademas que $\varepsilon, \chi : D_3 \to \mathbb{C}^\times$, son representaciones de grado 1, donde ε es la representación trivial y χ es la representación definida por:

$$\chi(g) = 1, \;\; \chi(\xi) = -1.$$

La representación χ proviene de la representación no trivial de $\mathbb{Z}_2$ usando la Proposición 5.4.7. Sea m la dimensión de la tercera representación irreducible. Por (5.3.3) se tiene que: $1^2 + 1^2 + m^2 = 6$, luego necesariamente $m = 2$.

Ejemplo 5.5.6. Consideremos el grupo de simetrías del tetrahedro: $\mathbb{A}_4$. Recordemos que este grupo es isomorfo a $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \ltimes \mathbb{Z}_3$. $\mathbb{A}_4$ esta generado por elementos g, a, b sujeto a las relaciones

$$g^3 = 1, \;\; a^2 = b^2 = 1, \;\; ab = ba, \;\; ga = bg, \;\; gb = abg.$$

Como $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ es un subgrupo de $\mathbb{A}_4$ la Proposición (5.5.1) dice que si V es una representación irreducible entonces $\dim V \leq 3$.

Sean $\chi_j : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{C}^\times$ las representaciones de grado 1 definidas por:

$$\chi_j(a) = \chi_j(b) = 1, \quad \chi_j(g) = e^{2i\pi\frac{j}{3}}.$$

Es inmediato comprobar que χ_j esta bien definido. Entonces hemos construido tres representaciones de grado 1. Por un calculo inmediato se comprueba que las clases de conjugación de $\mathbb{A}_4$ son $\{1\}, \{a, b, ab\}, \{g, ag, bg, abg\}, \{g^2, ag^2, bg^2, abg^2\}$. Sea entonces m la dimensión de la representación irreducible restante. Sabemos que $1^2 + 1^2 + 1^2 + m^2 = 12 = |\mathbb{A}_4|$. Luego, debe ser que $m = 3$

Más adelante aprenderemos como construir dichas representaciones para estos dos ejemplos.

5.6. Dimensiones de representaciones irreducibles. En esta sección probaremos que si m es la dimensión de una representación irreducible de un grupo finito G entonces m divide a $|G|$. Para ello necesitamos desarrollar ciertas nociones basicas de Teoría de números.

Lema 5.6.1. *Sea χ el caracter de una representación irreducible V entonces para todo $t \in G$*

$$\sum_{g \in G} \chi(tg^{-1})\, \chi(g) = \frac{|G|}{\dim V}\, \chi(t). \tag{5.6.1}$$

Demostración. Sea $\rho : G \to GL(V)$ la representación y asumamos que $\rho(g) = (A_{ij}(g))$. Por definición $\chi(g) = \sum_i A_{ii}(g)$. Luego $\chi(tg^{-1}) = tr(\rho(t)\rho(g^{-1})) = \sum_{ik} A_{ik}(t)A_{ki}(g^{-1})$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} \chi(tg^{-1})\, \chi(g) &= \sum_{g \in G} \sum_{ikj} A_{ik}(t)A_{ki}(g^{-1})A_{jj}(g) \\
&= \sum_{ikj} A_{ik}(t) \sum_{g \in G} A_{ki}(g^{-1})A_{jj}(g) \\
&= \sum_{ikj} A_{ik}(t) \frac{|G|}{\dim V} \delta_{kj}\delta_{ij} = \frac{|G|}{\dim V} \sum_i A_{ii}(t) = \frac{|G|}{\dim V}\, \chi(t).
\end{aligned}$$

La tercera igualdad se debe a (5.2.3). □

Ahora desarrollarremos lgo de teoría de números que se necesitará para demostrar el Teorema principal de esta sección.

Definición 5.6.2. Un número $a \in \mathbb{C}$ se dice un entero algebraico si existe un polinomio con coeficientes enteros mónico $P(x) = x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$, $d_i \in \mathbb{Z}$ tal que $P(a) = 0$.

Sea $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{C} : a \text{ es entero algebraico } \}$. El conjunto de enteros algebraicos $\mathcal{A}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$. Claramente $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorema 5.6.3. *$\mathcal{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Q}$, es decir que $a = \frac{\alpha}{\beta}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ y podemos asumir que son coprimos. Además, existe un polinomio $P(x) = x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$, con $d_i \in \mathbb{Z}$ tal que $P(a) = 0$. Entonces

$$0 = a^n + d_{n-1}a^{n-1} + \cdots + d_1 a + d_0 = \frac{\alpha^n}{\beta^n} + d_{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \cdots + d_1\frac{\alpha}{\beta} + d_0$$

Por lo tanto

$$-\frac{\alpha^n}{\beta^n} = d_{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \cdots + d_1\frac{\alpha}{\beta} + d_0,$$

entonces

$$-\alpha^n = \beta(d_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + d_1\alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}).$$

Asi, si $\beta \neq 1$ entonces existe un primo p tal que $p \mid \beta$ pero entonces $p \mid \alpha^n$ y luego α y β no son coprimos. Luego $\beta = 1$ y asi $a \in \mathbb{Z}$. $\square$

Proposición 5.6.4. *Sea D una matriz con elementos en $\mathcal{A}$ y sea λ un autovalor de D. Entonces $\lambda \in \mathcal{A}$.*

Lema 5.6.5. *Sea χ un caracter de G entonces $\chi(g) \in \mathcal{A}$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Como $g^n = 1$ para todo $g \in G$, donde $n = |G|$. Entonces $\rho(g)^n = \mathrm{Id}$, luego los autovalores de la matriz $\rho(g)$ satisfacen el polinomio $x^n - 1 = 0$ y por lo tanto son enteros algebraicos. Como $\chi(g)$ es la suma de dichos autovalores entonces $\chi(g) \in \mathcal{A}$. $\square$

Teorema 5.6.6. *Sea V una representación irreducible de G. Entonces* $\dim V \mid |G|$.

Demostración. Sea $n = |G|$ y sea χ el caracter de la representación V. Consideremos la matriz $n \times n$ D y el vector $n \times 1$ v definidos por

$$D_{hg} = \chi(hg^{-1}), \quad v_g = \chi(g).$$

Ahora calculemos cuanto es el vector Dv:

$$(Dv)_h = \sum_{g \in G} D_{hg}v_g = \sum_{g \in G} \chi(hg^{-1})\chi(g) = \frac{|G|}{\dim V}\,\chi(h).$$

La última igualdad es consecuencia de (5.6.1). Entonces $Dv = \frac{|G|}{\dim V}\,v$, asi v es un autovector de D y $\frac{|G|}{\dim V}$ es un autovalor de D. Por el Lema 5.6.5 la matriz D es una matriz con coeficientes enteros algebraicos, luego $\frac{|G|}{\dim V} \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Q}$, y por el Teorema 5.6.3 tenemos que $\frac{|G|}{\dim V} \in \mathbb{Z}$ y asi $\dim V$ divide a $|G|$. $\square$

Ejercicio 5.6.7. Sea G un grupo **no** Abeliano de orden p^3 con p primo. Si V es una representación irreducible de G, probar que $\dim V = 1$ o $\dim V = p$.

En lo siguiente mostraremos una mejora del Teorema 5.6.6 debida a Tate. Primero demostremos el siguiente Lema que se necesitará en la demostración.

Lema 5.6.8. *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ enteros tales que*

$$a^n \mid \frac{b^n}{c^{n-1}}.$$

Entonces a divide $\frac{b}{c}$.

Demostración. Sea p un número primo arbitrario. Asumamos que la máxima potencia de p que divide a a, b y c es p^x, p^y, y p^z respectivamente. Entonces por hipótesis tenemos que para todo n el entero p^{nx} divide a $p^{ny-(n-1)z}$, luego

$$nx \leqslant ny - (n-1)z.$$

Eligiendo $n = z + 1$ eso implica que $x \leqslant y - \frac{z}{z+1}z$, pero como

$\square$

Teorema 5.6.9. *Sea G un grupo finito y V una representación irreducible de G, entonces*

$$\dim V \mid \frac{|G|}{|Z(G)|}.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un natural arbitrario. Sea $\rho : G \to GL(V)$ la representación irreducible de caracter χ. Definimos

$$G^n = \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n-veces}, \quad Z(G)^n = \overbrace{Z(G) \times \cdots \times Z(G)}^{n-veces}.$$

Sea $T_n \subseteq G^n$ el subgrupo normal definido por

$$T_n = \{(g_1, \ldots, g_n) \in Z(G)^n : g_1 \ldots g_n = 1.\}$$

Sea $\widetilde{\rho} : G`n \to GL(V \otimes \ldots \otimes V)$ la representación definida por $\widetilde{\rho}(g_1, \ldots, g_n)(v_1 \otimes \ldots v_n) = g_1 \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes g_n \cdot v_n$, para todo $g_1, \ldots g_n \in G$, $v_1 \ldots v_n \in V$. La representación $\widetilde{\rho}$ es irreducible, en efecto si $\widetilde{\chi}$ es su caracter entonces $\widetilde{\chi}(g_1, \ldots, g_n) = \chi(g_1) \ldots \chi(g_n)$, luego

$$\begin{aligned}
< \widetilde{\chi}, \widetilde{\chi} > &= \frac{1}{|G^n|} \sum_{(g_1, \ldots g_n) \in G^n} \widetilde{\chi}(g_1, \ldots, g_n) \widetilde{\chi}(g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|^n} \sum_{(g_1, \ldots g_n) \in G^n} \chi(g_1) \ldots \chi(g_n) \chi(g_1^{-1}) \ldots \chi(g_n^{-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi(g^{-1}) \right) = 1.
\end{aligned}$$

Por el Lema de Schur sabemos que si $z \in Z(G)$ entonces existe un $\lambda_z \in \mathbb{C}$ tal que $\rho(z) = \lambda_z \operatorname{Id}$, luego $\widetilde{\rho}(z_1 \dots z_n) = \lambda_{z_1} \dots \lambda_{z_n} \operatorname{Id} = \lambda_{z_1 \dots z_n} \operatorname{Id}$. Por lo tanto si $(z_1 \dots z_n) \in T_n$, $\widetilde{\rho}(z_1 \dots z_n) = \operatorname{Id}$. Asi tenemos una representación irreducible

$$\widetilde{\rho} : G^n/T_n \to GL(V \otimes \dots V).$$

Por el Teorema 5.6.6 tenemos que $\dim(V \otimes \dots V)$ divide a $\dfrac{|G^n|}{|T_n|}$. Pero $|T_n| = |Z(G)|^{n-1}$, en efecto si $\phi : Z(G)^n \to Z(G)$ es el morfismo suryectivo definido por $\phi(z_1, \dots, z_n) = z_1 \dots z_n$, entonces $\ker(\phi) = T_n$ y asi $|\operatorname{Im}(\phi)||\ker(\phi)| = |Z(G)^n|$.

Luego tenemos que $(\dim V)^n$ divide a $\dfrac{|G^n|}{|Z(G)|^{n-1}}$. Luego el Teorema sigue del Lema anterior. □

6. Aplicaciones a la estructura de grupos

Mostremos como la teoría de representación desarrollada hasta ahora puede usarse para probar resultados estructurales de grupos finitos.

Proposición 6.0.10. *Sea p un número primo. Si G es un grupo de orden p^2 entonces G es abeliano.*

Demostración. Sean $\{m_i\}_{i=1}^s$ las dimensiones de las representaciones irreducibles de G. Por el Teorema 5.6.6 tenemos que $m_i = 1, p$ o p^2. Como siempre esta la representación trivial entonces digamos que $m_1 = 1$. Además sabemos que $p^2 = \sum_i m_i^2$, entonces si existe algun j tal que $m_j \neq 1$ entonces $m_j^2 \geq p^2$ y por lo tanto $p^2 \geq 1 + m_j^2 = 1 + p^2$ lo cual es absurdo. Entonce $m_i = 1$ para todo i y asi por la Proposicion 5.3.10 G es abeliano. □

Proposición 6.0.11. *Sean p, q primos $p < q$ tales que p no divide a $q - 1$. Si G es un grupo de orden pq entonces G es abeliano.*

Demostración. Analogamente como antes m_i divide a pq y $m_i^2 < |G|$ entonces $m_i = p$ o $= 1$. Sean n la cantidad de representaciones irreducibles de grado p y d la cantidad de representaciones de grado 1. Entonces tenemos que

$$pq = np^2 + d. \tag{6.0.2}$$

Por 5.4.3 sabemos que d divide a $|G|$, y por (6.0.2) p divide a m. Por lo tanto $m = p$ o $m = pq$. Si $m = p$ entonces $pq = np^2 + p$ y asi $q = np + 1$ y luego p divide a $q - 1$, lo cual contradice nuestras hipotesis. Entonces $m = pq$ y asi G es abeliano. □

7. Inducción y restricción de representaciones

Sea $H \subseteq G$ un subgrupo. Si V es una representación de G via $\rho : G \to GL(V)$ entonces V es una representación de H via la restricción de ρ, es decir via $\rho\,|_H : H \to GL(V)$. A dicha representación se la denota por $\operatorname{Res}^G_H V$.

Reciprocamente sea W es una representación de H. Consideremos el espacio $\Bbbk G \otimes W$. Este espacio posee una acción natural de G dada por:

$$g \cdot (f \otimes w) = gf \otimes w,$$

para todo $g, f \in G, w \in W$. El subespacio S de $\Bbbk G \otimes W$ generado por los elementos $\{gh \otimes w - g \otimes h \cdot w : g \in G, h \in H, w \in W\}$ es invariante bajo la acción de G. Denotaremos por $\operatorname{Ind}_H^G W$ al espacio cociente $\operatorname{Ind}_H^G W = (\Bbbk G \otimes W)/S$.

Lema 7.0.12. $\dim \operatorname{Ind}_H^G W = \dfrac{|G|}{|H|} \dim W.$

Demostración. □

Proposición 7.0.13 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *Si V es una representación de G y W una representación de H entonces existen isomorfismos naturales*

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, V) \simeq \operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G V).$$

Demostración. Sea $\phi : \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, V) \to \operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G V)$ y sea $\psi : \operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G V) \to \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, V)$ las transformaciones definidas por

$$\phi(\alpha)(w) = \alpha(\overline{1 \otimes w}), \quad \psi(\beta)(\overline{g \otimes w}) = g \cdot \beta(w),$$

para todo $w \in W$, $g \in G$.

□

Como consecuencia tenemos que si V y W son como en la Proposicion anterior entonces

$$< \chi_{\operatorname{Ind}_H^G W}, \chi_V >=< \chi_W, \chi_{\operatorname{Res}_H^G V} > . \tag{7.0.3}$$

La demostración es inmediata usando el corolario 5.3.4. Notar que los productos internos en ambos miembros de (7.0.3) son en G y en H respectivamente.

Sea $\rho : H \to GL(W)$ una representación de H. Sea $S \subseteq G$ un conjunto de representantes de clases dobles de H, es decir que

$$G = \bigcup_{s \in S} HsH.$$

Para cada $s \in S$ sea $H_s = sHs^{-1} \cap H$. Definamos una representación $\rho_s : H_s \to GL(W)$ de H_s por

$$\rho_s(shs^{-1}) = \rho(h), \quad \text{para todo } h \in H.$$

A dicha representación la denotaremos por W_s.

Proposición 7.0.14. *Existe un isomorfismo de H-módulos*

$$\operatorname{Res}_H^G(\operatorname{Ind}_H^G W) \simeq \oplus_{s \in S} \operatorname{Ind}_{H_s}^H W_s.$$

Demostración. Sea $X \subseteq G$ un conjunto de representantes de coclases a derecha de H. Es decir que $G = \bigcup_{x \in X} xH$. Sabemos que $\operatorname{Ind}_H^G W = \oplus_{x \in X} \overline{\Bbbk x \otimes W}$. Para cada $s \in S$ sea $U(s) = \oplus_{x \in X \cap HsH} \overline{\Bbbk x \otimes W}$. Luego $\operatorname{Ind}_H^G W = \oplus_{s \in S} U(s)$. Resta con demostrar que $U(s) \simeq \operatorname{Ind}_{H_s}^H W_s$.

Si $x \in X \cap HsH$ entonces $x = hsh'$ donde $h, h' \in H$. Sea $Y \subseteq H$ el conjunto de coclases a derecha de H_s. Entonces existe un $y \in Y$ tal que $h \in yH_s$, es decir que existe $f \in H$ tal que $x = hsh' = ysfs^{-1}sh' = ysfh'$, luego

$$\overline{\Bbbk x \otimes W} = \overline{\Bbbk ysfh' \otimes W} = \overline{\Bbbk ys \otimes fh' \cdot W} = \overline{\Bbbk ys \otimes W}.$$

Por lo tanto $U(s) = \oplus_{y\in Y}\overline{\Bbbk ys\otimes W}$. Sea Ahora $\overline{\Bbbk ys\otimes W} \simeq \overline{\Bbbk y\otimes s\cdot W}$ donde

□

7.1. Criterio de irreducibilidad de Mackey. Ahora estamos listos para probar un criterio de irreducibilidad de las representaciones inducidas. Primero introdujamos una definición.

Definición 7.1.1. Dos representaciones de un grupo G, Vy W se dicen disjuntas si

$$< \chi_V, \chi_W >= 0.$$

Teorema 7.1.2. *Sea $\rho : H \to GL(W)$ una representación de H. Entonces $\mathrm{Ind}_H^G W$ es irreducible si y solo si*

1. *W es irreducible,*
2. *para todo $s \in S$, $s \neq 1$ las representaciones de H_s W_s y $\mathrm{Res}_{H_s}^H W$ son disjuntas.*

Demostración. Sea χ el caracter de $\mathrm{Ind}_H^G W$. Entonces por el corolario 5.3.5 $\mathrm{Ind}_H^G W$ es irreducible si y solo si $< \chi, \chi >= 1$. Luego, usando la reciprocidad de Frobenius (7.0.3) tenemos que

$$< \chi, \chi >=< \chi_W, \chi_U >,$$

donde $U = \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G W)$. Usando la Proposición 7.0.14 tenemos que

$$U = \oplus_{s\in S}\mathrm{Ind}_{H_s}^H W_s.$$

Luego,

$$< \chi, \chi >=< \chi_W, \chi_U >= \sum_{s\in S} < \chi_W, \chi_{\mathrm{Ind}_{H_s}^H W_s} >= \sum_{s\in S} < \chi_{Res_{H_s}^H W}, \chi_{W_s} > .$$

La tercera igualdad es debida nuevamente a la reciprocidad de Frobenius. Entonces

$$< \chi, \chi >=< \chi_W, \chi_W > + \sum_{1\neq s\in S} < \chi_{Res_{H_s}^H W}, \chi_{W_s} > .$$

Como $< \chi_W, \chi_W >> 0$ entonces $< \chi, \chi >= 1$ si y solo si $< \chi_W, \chi_W >= 1$ y ademas $< \chi_{Res_{H_s}^H W}, \chi_{W_s} >= 0$ para todo $s \in S$, $s \neq 1$.

□

Ejemplo 7.1.3. Aplicaremos las tecnicas anteriores para determinar todas las representaciones irreducibles del grupo Dihedral. Recordemos que el grupo D_n esta generado por los elementos g y ξ sujetos a las relaciones

$$g^n = 1 = \xi^2, \quad \xi g = g^{n-1}\xi.$$

Entonces el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n =< g >$ esta contenido en D_n.

Para $j = 0 \dots n-1$ sea $\chi_j : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^\times$ la representación de grado 1 determinada por

$$\chi_j(g) = e^{\frac{2\pi ij}{n}} = \lambda_j.$$

Sea $V_j = \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z}_n}^{D_n} \chi_j$. Entonces $\dim V_j = 2$. Como el grupo Dihedral se escribe como union de dos coclases a derecha de la forma $D_n = \mathbb{Z}_n \cup \xi\mathbb{Z}_n$, luego una base de V_j es $\{v = \overline{1\otimes 1}, w = \overline{\xi\otimes 1}\}$. La acción de D_n sobre V_j es

$$g \cdot v = \lambda_j\, v, \quad \xi \cdot v = w, \quad g \cdot w = \lambda_j^{n-1}\, w, \quad \xi \cdot w = v.$$

Queda como ejercico para el lector demostrar que si $j \neq 0, \frac{n}{2}$ entonces V_j es irreducible. Ademas si $0 < i, j < \frac{n}{2}$ entonces $V_i \simeq V_j$ si y solo si $i = j$.

Asumamos que n es par. Entonces tenemos al menos cuatro representaciones de grado 1 $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3 : D_n \to \mathbb{C}^\times$, donde χ_0 es la representación trivial y las otras estan determinadas por:

$$\chi_1(g) = -1,\ \chi_1(\xi) = 1; \quad \chi_2(g) = -1,\ \chi_2(\xi) = -1; \quad \chi_3(g) = 1,\ \chi_3(\xi) = -1.$$

Se puede comprbar facilmente que estan bien definidas pues n es par. Entonces tenemos 4 representaciones de grado 1 y tenemos $\frac{n}{2} - 1$ representaciones de grado 2. Entonces

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2(\frac{n}{2} - 1) = 4 + 4(\frac{n}{2} - 1) = 2n = |D_n|.$$

Por lo tanto estas son **todas** las representaciones irreducibles de D_n.

Para n impar tenemos solamente dos representaciones de grado 1: la trivial y χ_3. Pero la cantidad de representaciones de grado 2 son aquellas entre 0 y $\frac{n}{2}$, es decir que hay $\frac{n-1}{2}$ representaciones de grado 2, y

$$1^2 + 1^2 + 2^2\, \frac{n-1}{2} = 2 + 4\frac{n-1}{2} = 2n = |D_n|.$$

8. El indicador de Frobenius-Schur

Definición 8.0.4. Dado V una representación de G, diremos que una forma bilineal $\beta : V\otimes V \to \mathbb{C}$ es *G-invariante* si para todo $v, w \in V$ y todo $g \in G$

$$\beta(g \cdot v\otimes g \cdot w) = \beta(v\otimes w).$$

Proposición 8.0.5. *Sea V una representación irreducible de G y $\beta, \gamma : V\otimes V \to \mathbb{C}$ dos formas bilineals G-invariantes. Entonces existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\beta = \lambda\gamma$. Es decir que las formas bilineals G-invariantes son únicas salvo por homotecia.*

Demostración. Definimos $\phi_\beta : V \to V^*$ la transfromación dada por

$$\phi_\beta(v)(w) = \beta(v\otimes w), \quad v, w \in V.$$

Como β es G-invariante entonces ϕ_β es un morfismo de G-módulos, en efecto si $g \in G$ entonces

$$\begin{aligned} \phi_\beta(g \cdot v)(w) &= \beta(g \cdot v\otimes w) = \beta(v\otimes g^{-1} \cdot w) \\ &= \phi_\beta(v)(g^{-1} \cdot w) = (g \cdot \phi_\beta(v))(w). \end{aligned}$$

Análogamente construimos ϕ_γ. Como V es irreducible y V^* es irreducible también, por el Lema de Schur tenemos que una debe ser múltiplo escalar de la otra.

□

Nos va a interesar saber cuando una representación de G posee o no una forma bilineal simétrica invariante. El primer resultado afirmativo es el siguiente:

Proposición 8.0.6. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita, que es una representación de G. Entonces V posee una forma bilineal simétrica invariante por G no degenerada.*

Demostración. Todo espacio vectorial real posee un producto interno, es decir que existe una forma bilineal simétrica $\beta : V \otimes V \to \mathbb{R}$ tal que $\beta(v \otimes v) \geqslant 0$ con igualdad si y sólo si $v = 0$.

En efecto si $\{v_i\}$ es base de V entonces definimos β por

$$\beta(\sum_i a_i \otimes \sum_j b_j v_j) = \sum_i a_i b_i.$$

Es decir que se declaran los miembros de la base $\{v_i\}$ vectores ortonormales y se exitende linealmente. Es inmediato demostrar que β cumple con lo requerido.

Ahora construiremos a partir de β una forma bilineal G-invariante. Sea $\widehat{\beta} : V \otimes V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{\beta}(v \otimes v) = \sum_{g \in G} \beta(g \cdot v \otimes g \cdot v).$$

Por definición $\widehat{\beta}$ es una forma bilineal simétrica no degenerada (más aun es un producto interno) G-invariante. □

Sea V una representación irreducible de G. Diremos que V es de tipo 1, 2 o 3 de acuerdo a:

1. Si V no posee una forma bilineal G invariante no nula,
2. V posee una forma bilineal simétrica G invariante no nula, o
3. V posee una forma bilineal alternante G invariante no nula.

Se suele decir que las representaciones de tipo 1 son *complejas*, las de tipo 2 son *reales* y las de tipo 3 *cuaterniónicas*.

Proposición 8.0.7. *Cualquier representación irreducible es de tipo 1, 2 o 3.*

Demostración. Sea V una representación irreducible de G. Asumamos que V posee una forma bilineal G-invariante no nula $\beta : V \otimes V \to \mathbb{C}$. Entonces $\beta = \beta_0 + \beta_1$ donde $\beta_0 \in Sim(V)$, $\beta_1 \in Alt(V)$, son las formas bilineales definidas en (1.1.1). Como β es G-invariante entonces β_0 y β_1 también lo son. Pero entonces por la unicidad de las formas bilineales G-inariantes, debe ser que $\beta_0 = 0$ o bien que $\beta_1 = 0$. □

Analicemos cuando una representación es de tipo 1 o 2.

Proposición 8.0.8. *Sea V una representación irreducible de G de caracter χ.Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *V es de tipo 2 o 3.*
(ii) *$\chi(g) \in \mathbb{R}$ para todo $g \in G$.*
(iii) *V es autodual, es decir $V \simeq V^*$.*

Demostración. Veamos que (i) es equivalente a (iii). Sea $\beta : V \otimes V \to \mathbb{C}$ una forma bilineal G-invariante. Definimos $\phi_\beta : V \to V^*$ por

$$\phi_\beta(v)(w) = \beta(v \otimes w), \quad \text{para todo } v, w \in V.$$

La función ϕ_β es de G-módulos, en efecto si $g \in G$, $v, w \in V$ entonces

$$\phi_\beta(g \cdot v)(w) = \beta(g \cdot v \otimes w) = \beta(v \otimes g^{-1} \cdot w) = g \cdot \phi_\beta(v)(w).$$

ϕ_β es inyectiva pues β es no degenerada. Luego, $V \simeq V^*$. La recíproca es evidente.

Ahora, χ toma valores reales si y solo si $\overline{\chi(g)} = \chi(g)$, para todo $g \in G$. Pero como $\overline{\chi}$ es el caracter de V^* esto ocurre si y solo si $V \simeq V^*$. Lo cual demuestra la equivalencia (ii)$\Leftrightarrow$ (iii).

□

Proposición 8.0.9. *Sea V una representación de G. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *V se descompone como $V = V_0 \oplus iV_0$, donde V_0 es un espacio vectorial real G-invariante.*
b) *V posee una forma bilineal simétrica G-invariante.*

La Proposición anterior implica que si $G \subseteq O_n(\mathbb{C})$ entonces existe un subgrupo conjugado a G contenido en $O_n(\mathbb{R})$.

Definición 8.0.10. Dada V una representación irreducible de G de caracter χ, definimos el *indicador de Frobenius-Schur* al escalar $\nu_2(\chi)$ definido por

$$\nu_2(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2).$$

Teorema 8.0.11 (Frobenius-Schur)**.** *Sea V una representación irreducible de G de caracter χ. Entonces*

(a) $\nu_2(\chi) = 0, 1, -1$.
(b) *$\nu_2(\chi) = 0$ si y sólo si V es de tipo 1, $\nu_2(\chi) = 1$ si y solo si V es de tipo 2, y $\nu_2(\chi) = -1$ si y solo si V es de tipo 3.*

Para ver la demostración de este Teorema se puede consultar los libros [S] y [Se].

Veamos un ejemplo. Consideramos $Q_8 = \{\pm 1, \pm j, \pm k, \pm l\}$ el grupo de los cuaterniones y la representación $\rho : Q_8 \to GL_2(\mathbb{C})$ dada por

$$\rho(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(k) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Esta representación es irreducible. Calculemos el indicador de Frobenius-Schur. Como $j^2 = k^2 = l^2 = -1 = (-j^2) = (-k^2) = (-l^2)$, entonces

$$\nu_2(\chi) = \frac{1}{|Q_8|} \sum_{g \in Q_8} \chi(g^2) = \frac{1}{8}\left((2 \times 2) + (-2) \times 6\right) = -1.$$

Como ρ es inyectiva, identifiquemos a Q_8 con $\rho(Q_8)$.El cálculo anterior demuestra que es imposible tener un grupo H conjugado a Q_8 tal que $H \subseteq GL_2(\mathbb{R})$. En efecto si esto ocurrierra existiria una matriz $A \in GL_2(\mathbb{C})$ tal que $AHA^{-1} = Q_8$. Entonces el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ posee otra acción del grupo Q_8 dada por:

$$AhA^{-1} \cdot v = hv,$$

para todo $h \in H$, $v \in \mathbb{C}^2$. Denotemos por V al espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con esta nueva acción. Si $\phi : V \to \mathbb{C}^2$ es el isomorfismo dado por $\phi(v) = Av$ entonces tenemos que

$$\phi(AhA^{-1} \cdot v) = \phi(hv) = Ahv = AhA^{-1} \cdot \phi(v).$$

Por lo tanto $V \simeq \mathbb{C}^2$. Pero $V = \mathbb{R}^2 \oplus i\mathbb{R}^2$ donde $\mathbb{R}^2$ es invariante por Q_8. Por lo tanto V posee una forma bilineal Q_8-invariante no nula, luego debería ser de tipo 2 lo cual es un absurdo.

Sea $\{C_i\}_{i=1}^{s}$ el con junto de clases de conjugación. Si χ es un caracter, denotaremos por $\chi(C_i)$ el valor de χ en cualquier elemento de C_i.

El siguiente Lema será usado más adelante.

Lema 8.0.12.

$$\sum_{V \in \widehat{G}} \overline{\chi_V(C_i)}\, \chi_V(C_j) = \delta_{ij} \frac{|G|}{\#C_j}. \tag{8.0.1}$$

Demostración. Las relaciones de ortogonalidad de caracteres implican que si V_i y V_j son representaciones irreducibles de G entoces

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, \chi_j(g) = \delta_{ij},$$

lo cual implica que

$$\sum_{l} \frac{\#C_l}{|G|} \overline{\chi_i(C_l)}\, \chi_j(C_l) = \delta_{ij},$$

pues los valores de los caracteres dependen de la clase de conjugación. Si U es la matriz compleja $S \times s$ definida por

$$U_{ij} = \sqrt{\frac{\#C_i}{|G|}}\, \chi_j(C_i),$$

entonces

$$\begin{aligned}(U^*U)_{ij} &= \sum_k U^*_{ik} U_{kj} = \sum_k \sqrt{\frac{\#C_k \#C_k}{|G|^2}}\, \overline{\chi_i(C_k)}\, \chi_j(C_k) \\ &= \sum_k \frac{\#C_k}{|G|} \overline{\chi_i(C_k)}\, \chi_j(C_k) = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Es decir que $U^*U = \mathrm{Id}$, y por lo tanto $UU^* = \mathrm{Id}$. Pero esto ultimo implica que

$$\delta_{ij} = (UU^*)_{ij} = \sum_k U_{ik} \overline{U}_{jk} = \sum_k \sqrt{\frac{\#C_i}{|G|}}\, \chi_k(C_i) \sqrt{\frac{\#C_j}{|G|}}\, \overline{\chi_k(C_j)}.$$

Luego

$$\delta_{ij}\frac{|G|}{\#C_j} = \sum_k \chi_k(C_i)\,\overline{\chi_k(C_j)}.$$

□

Para cada $h \in G$ sea

$$\mathcal{S}(h) = \#\{g \in G : g^2 = j\}.$$

Proposición 8.0.13. *Para todo $h \in G$ vale que*

$$\mathcal{S}(h) = \sum_i \nu_2(\chi_i)\chi_i(h). \tag{8.0.2}$$

Demostración. Por definición sabemos que

$$\nu_2(\chi_i) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_i(h)\mathcal{S}(h) =< \chi_i, \mathcal{S} > .$$

Como $\mathcal{S}$ es una función de clase y los caracteres de las representaciones irreducibles χ forman una base del espacio de funciones de clase, se tiene que

$$\mathcal{S} = \sum_i < \chi_i, \mathcal{S} > \chi_i = \sum_i \nu_2(\chi_i)\,\chi_i.$$

□

Definición 8.0.14. Una clase de conjugación $C \subseteq G$ se dice *autodual* si para todo $g \in C$ se cumple que $g^{-1} \in C$.

Teorema 8.0.15. *Sea m la cantidad de representaciones irreducibles autoduales de G. Entonces*

(i) $m = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G}\mathcal{S}(g^2)$.

(ii) *m es igual a la cantidad de calses de conjugación autoduales.*

Demostración. Primero demostremos (i).

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathcal{S}(g^2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathcal{S}(g)\overline{\mathcal{S}(g)} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i,j}\nu_2(\chi_i)\nu_2(\chi_j)\,\chi_i(g)\,\overline{\chi_j(g)} \\ &= \sum_{i,j}\nu_2(\chi_i)\nu_2(\chi_j) < \chi_i, \chi_j >= \sum_i \nu_2^2(\chi_i) = m.\end{aligned}$$

La segunda igualdad es debida a (8.0.2), la cuarta por la ortogonalidad de caracteres y la ultima se debe a que $\nu_2^2(\chi_j) = 1$ solo cuando la representación es autodual.

Ahora demostremos (ii). Si χ es un caracter de una representación irreducible, entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \overline{\chi} \\ 0 & \text{si } \chi \neq \overline{\chi}\end{cases}$$

Entonces

$$m = \sum_i \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)^2 = \sum_{C \text{ clases de conj.}} \sum_i \frac{\#C}{|G|} \chi_i(C)^2.$$

Como $\overline{\chi_i(C)} = \chi_i(C^{-1})$ entonces $\chi_i(C)^2 = \chi_i(C)\overline{\chi_i(C^{-1})}$. Luego por (8.0.1)

$$\sum_i \chi_i(C)^2 = \sum_i \chi_i(C)\overline{\chi_i(C^{-1})} = \begin{cases} 0 & \text{si } C \neq C^{-1} \\ \frac{|G|}{\#C} & \text{si } C = C^{-1}. \end{cases}$$

Por lo tanto m es la cantidad de clases de conjugación autoduales.

□

Observación 8.0.16. Como consecuencia inmediata se tiene que $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathcal{S}(g^2)$ es la cantidad de clases de conjugación autoduales; algo que no es inmediato de demostrar sin usar teoría de representaciones.

Teorema 8.0.17. *Sea G un grupo finito de orden impar. Entonces toda representación irreducible de G no trivial es compleja.*

Demostración. Sea $n = |G|$. Entonces para cada $g \in G$, $g^n = 1$, lo cual impliac que $g^{n+1} = g$. Como n es impar, $n = 2k - 1$ para algun $k \in \mathbb{N}$, luego $g^{2k} = (g^k)^2 = g$. Es decir que $\mathcal{S}(g) \geqq 1$ para todo $g \in G$. Pero $\sum_g \mathcal{S}(g) = n$ por lo tanto debe ser que $\mathcal{S}(g) = 1$ para todo $g \in G$, lo cual implica que $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathcal{S}(g)^2 = 1$. Por el teorema 8.0.15 (i) $m = 1$; es decir la representación trivial es la unica autodual.

□

El siguiente resultado es más profundo y no es evidente como resolverlo sin usar Teoría de representaciones.

Proposición 8.0.18 (Burnside)**.** *Sea G un grupo finito de orden impar y sea s el número de clases de conjugación de G. Entonces*

$$|G| \equiv s \ (mod 16).$$

Demostración. Sean $\{\chi_i\}$ el conjunto de caracteres de las representaciones irreducibles donde χ_0 es el caracter de la representación trivial. Por el Teorema 8.0.17, salvo la representación trivial, los caracteres vienen en pares $\chi_0, \chi_1, \chi_1', \chi_2, \chi_2' \dots$. Donde χ_i' es el caracter de la representación dual del caracter χ_i. Sean $m_0 = 1, m_1, m_2 \dots$ sus dimensiones.

Como la cantidad de representaciones irreducibles es impar entonces $s = 2k + 1$. Luego por (5.3.3)

$$|G| = 1 + \sum_{j=1}^{k} 2m_j^2.$$

Sabemos que m_j divide a $|G|$ por lo tanto m_j es un número impar digamos $m = 2d_j + 1$. Luego

$$|G| = 1 + \sum_{j=1}^{k} (8d_j^2 + 8d_j + 2) = 1 + 2k + 8 \sum_{j=1}^{k} d_j(d_j + 1).$$

Como el entero $d_j(d_j + 1)$ es siempre un número par entonces $8\sum_{j=1}^{k} d_j(d_j + 1) \equiv 0 \pmod{16}$ y por lo tanto $|G| \equiv 1 + 2k = s \pmod{16}$. □

9. Ejercicios

Los siguientes ejercicios fueron realizados por los siguientes alumnos, a los cuales les agradezco mucho la participación y la dedicación en el curso: Paola Lizarralde, Bibiana Patio, Adriana Mejia, Diana Lorena Valencia, Sergio Carrillo, Carlos A. Hurtado A.

Ejercicio 1. *Probar que si $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ es un subgrupo finito, entonces $Z(G)$ es un grupo cclico*

Ejercicio 2. *Sea $G \subseteq Q_8$ el subgrupo $G = \{1, -1, i, -i\}$, entonces $Q_8 \simeq G \ltimes_\sigma \mathbb{Z}_2$. Calcular el cociclo σ.*

Ejercicio 3. *Probar que existe un subgrupo normal H de $\mathbb{S}_4$ tal que $H \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.*

Ejercicio 4. *Demostrar que $\mathbb{S}_4/H \simeq \mathbb{S}_3$, y por lo tanto $\mathbb{S}_4 \simeq (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \ltimes \mathbb{S}_3$*

Ejercicio 5. *$\mathbb{S}_3 = \langle g, \xi \rangle$ donde $g^3 = 1 = \xi^2$ y $\xi g = g^2\xi$. Sea $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $\rho : \mathbb{S}_3 \to GL_2(\mathbb{C}$ la representación determinada por*

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \rho(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que ρ está bien definida y es irreducible.

Ejercicio 6. *Sabemos de 4 que $\mathbb{S}_4 \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes \mathbb{S}_3$. Sea $\widehat{\rho} : \mathbb{S}_4 \to GL_2(\mathbb{C})$ la representación dada por:*

$$\widehat{\rho}(h, t) = \rho(t)$$

para $h \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $t \in \mathbb{S}_3$, donde ρ es la del ejercicio 5. Demostrar que $\widehat{\rho}$ es una representación y que es irreducible.

Ejercicio 7. *Calcular las dimensiones representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$.*

Ejercicio 8. *Sea G un grupo simple no Abeliano. Demostrar que G posee solo una representacion irreducible de grado 1.*

Ejercicio 9. *Cuantas representaciones irreducibles de grado 1 posee $\mathbb{A}_4$ y D_6*

Ejercicio 10. *Demostrar que $\mathbb{A}_4 \not\simeq D_6$*

Ejercicio 11. *Sea H un grupo finito y $\alpha : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(H)$ un morfismo de grupos, consideramos el producto semidirecto $G = H \ltimes \mathbb{Z}_2$. El producto es*

$$(h, x)(g, y) = (h\alpha(x)(g), xy) \quad x, y \in \mathbb{Z}_2,\ h, g, \in H.$$

Sea $\rho : H \longrightarrow GL(V)$ *una representación de* H*. Denotamos* $\rho_\alpha : H \longrightarrow GL(V)$ *la representación de* H *dada por:*

$$\rho_\alpha(h)(v) = \rho(\alpha(1)(h))(v), \quad h \in H,\ v \in V$$

Denotamos V_α *al espacio* V *con esta representación*

a) *Demostrar que si* $W \subseteq V$ *es una subrepresentación entonces* $W_\alpha \subseteq V_\alpha$*.*
1. *Demostrar que* $(V_\alpha)_\alpha \simeq V$*.*
2. *Demostrar que si* V *es una representación irreducible entonces* V_α *también lo es.*

Ejercicio 12. *Calcular el indicador de Frobenius-Schur de la representación del ejercicio 5.*

Referencias

[L] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley (1965).
[M] J. M. Mombelli , *Anillos simples y semisimples*, monografía para la UMA (2000), disponible en http://www.mate.uncor.edu/mombelli/research.html.
[S] B. Simon, *Representations of finite and compact groups*, **10** Graduate Studies in Mathematics, A.M.S (1996).
[Sch] H.J. Schneider, *Lectures on Hopf algebras*, http://www.mate.uncor.edu/andrus/articulos.html
[Se] J. P. Serre, *Linear Representations of finite groups*, Springer-Verlag (1977).