Some stories about geodesics

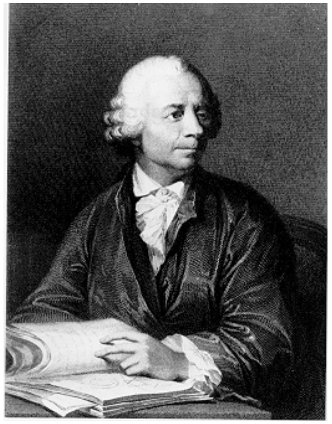
Some définitions

Pierre Ossian Bonnet (1819-1898)

« Une ligne tracée sur une surface prend le nom de *ligne géodésique*, quand son plan osculateur est constamment normal à la surface. » [Bonnet 1855]

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

« Ainsi les lignes tracées par les mesures géodésiques ont la propriété d'être les plus courtes que l'on puisse mener sur la surface du sphèroïde, entre deux de leurs points quelconques ; […] elles seraient décrites par un mobile mû uniformément dans cette surface. […] nous désignerons cette ligne sous le nom de ligne géodésique. » [Laplace 1799]



Leonhard Euler (1707-1783)

« Le mouvement que décrit un corps sur une surface *ABC* est la ligne la plus courte que l'on peut mener du point D au point M, si le corps, bien entendu, se meut dans le vide et n'est soumis à aucune force. » [Euler 1736]

Joseph Liouville (1809-1882)

« […] la ligne géodésique est celle que décrirait sur la surface un point matériel assujeti à se mouvoir sur cette surface, et lancé d'abord avec une certaine vitesse, mais ensuite abandonné à lui-même. » [Liouville 1850]

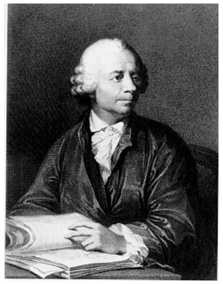
A problem linked with the birth and the rise of differential calculus and the question of applications of calculus to geometry

Johann Bernoulli
(1667-1748)

1697 – Johann Bernoulli asked the question to find the shortest path between two points of a surface. In a letter to Marquis de l'Hospital, he wrote that he had found the differential equation of these paths.

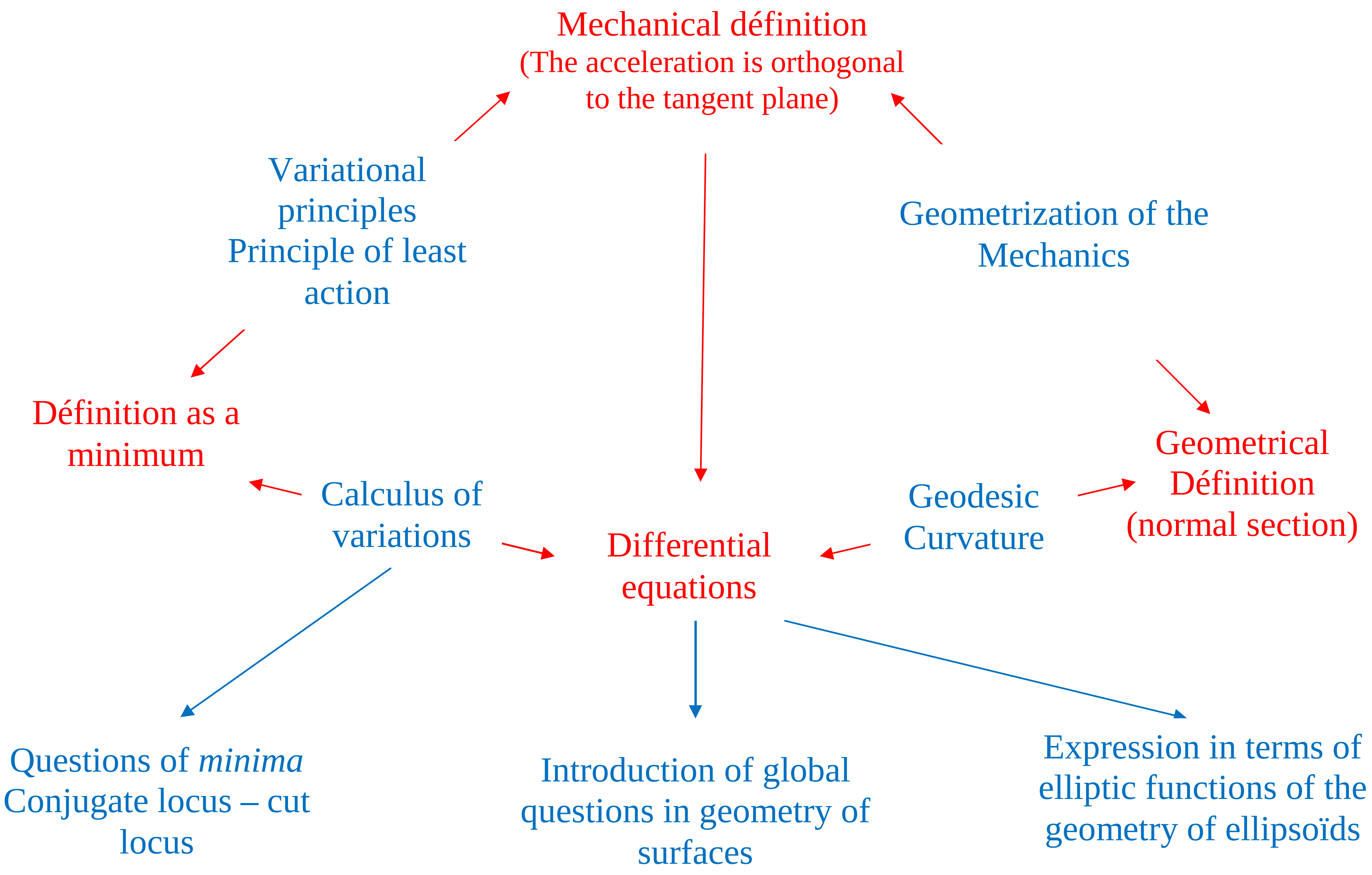
Jakob Bernoulli
(1654-1705)

1698 – Jakob Bernoulli fins that the shortest path between two points on a cylinder applied on straight lines when we developp the surface on a plane.



Leonhard Euler
(1707-1783)

1732 – Leonhard Euler found again the differential equation of the geodesics and linked this question with Mechanics (*Mechanica sive motus scienta analytica* – 1736)


Mechanical définition
(The acceleration is orthogonal
to the tangent plane)
Variational
principles
Principle of least
action
Geometrization of the
Mechanics
Définition as a
minimum
Calculus of
variations
Differential
equations
Geodesic
Curvature
Geometrical
Définition
(normal section)
Questions of *minima*
Conjugate locus – cut
locus
Introduction of global
questions in geometry of
surfaces
Expression in terms of
elliptic functions of the
geometry of ellipsoïds

Carl Friederich Gauss (1777-1855)

In the Disquisitiones *générales circa superficies* (1827), Gauss proves two theorems that will be fundamental from a technical point of view for the formalization of the problems concerning geodesics.

« If on a curved surface an infinite number of shortest lines of equal length be drawn from the same initial point, the lines joining their extremities will be normal to each of the lines. »

« With the theorem of the preceding article we associate another, which we state as follows: If on a curved surface we imagine any line whatever, from the different points of which are drawn at right angles and toward the same side an infinite number of shortest lines of the same length, the curve which joins their other extremities will cut each of the lines at right angles. »

« Among the various cases in which we have this condition of orthogonality, the most important is that in which all the lines of one of the two systems, e. g., the first, are shortest lines. »

In this case, the metric takes the form of :

$$ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2$$

and the function m verify the differential équation

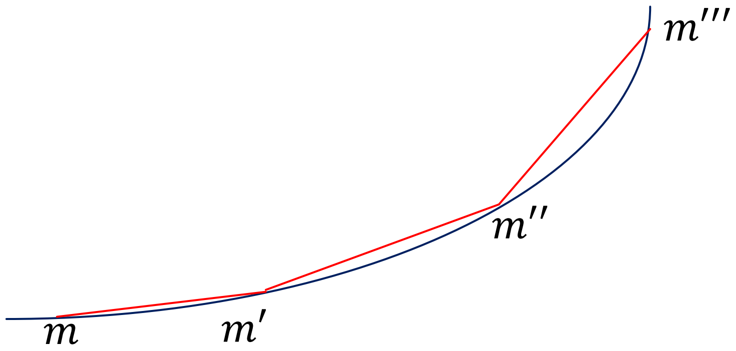
$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dp^2}$$

where R and R' are the principal radius of curvature.

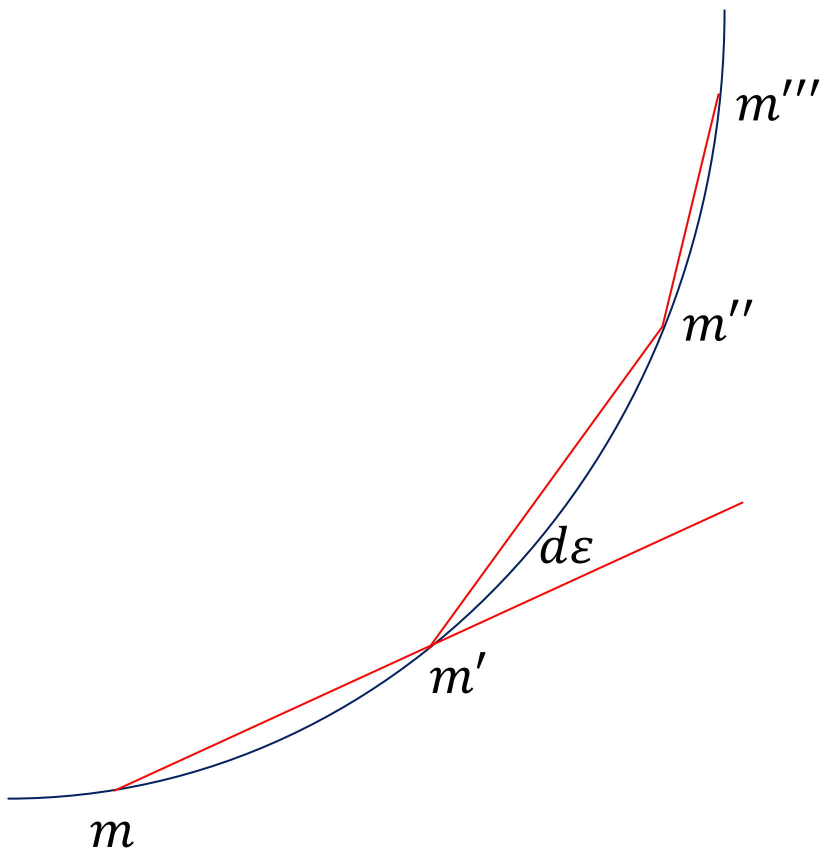
Joseph Liouville (1809-1883)

- In 1850, these reflections « ont même passé dans l’enseignement ordinaire ».
- *Applications de l’analyse à la géométrie*, Paris, 1850
- To find a link between infinitesimal calculus and geometry

« Soit $m\ m'\ m''\ m'''$ ... une courbe quelconque. Considérons-la comme remplacée par un polygone infinitésimal inscrit qui se confondra avec elle à la limite : mm', $m'm''$, $m''m'''$, … seront les côtés successifs de ce polygone. » [Liouville 1850, 547].



The elements that are used to analyse the curves



The tangent :

« Le prolongement de l'élément mm' ou ds donnera la tangente en m. »

The angle of contingency

« l'angle de contingence, …, l'angle que font entre elles deux tangentes consécutives ».

The oculating plane and the osculating circle

« Le plan $mm'm''$ des deux éléments consécutifs mm', $m'm''$ est le plan osculateur de la courbe en m : le cercle tracé dans ce plan et qui passe par les trois points m, m', m'', ou qui a avec la courbe deux éléments communs, est le cercle osculateur. »

Mixing geometrical and analytical reflections

- Relating a coordinate system, Liouville writes down x, y, z the coordinates of m and $x + dx, y + dy, z + dz$ those of m'. Using elementary remarks of analytical geométry and writing down α, β, γ the angles formed by ds and the axis, he obtains :

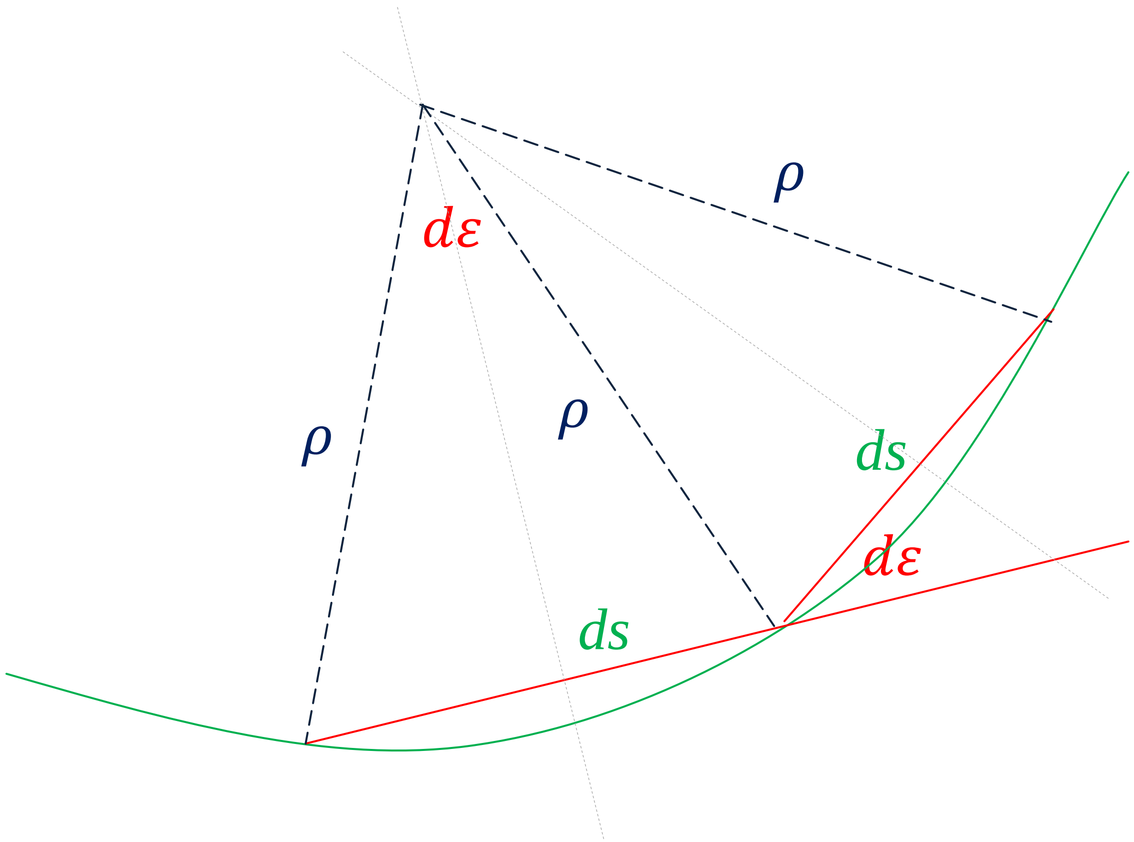
$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- An expression of the curvature radius in terms of the angle of contengency $d\varepsilon$

$$\rho \, d\varepsilon = \, ds$$

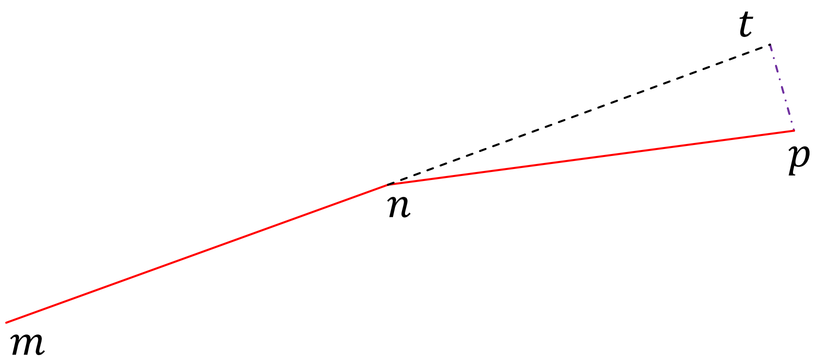
« La courbure, au contraire, qui se mesure naturellement par la valeur inverse du rayon de courbure est directement proportionnelle à $d\varepsilon$. »



$$\rho \, d\varepsilon = \, ds$$

A conceptual remark:

« Dans tout ce qui précède, il n'a été question que de la courbure ou de la torsion absolue des courbes, résultant de leur écart plus ou moins rapide à leur tangente ou à leur plan osculateur ».

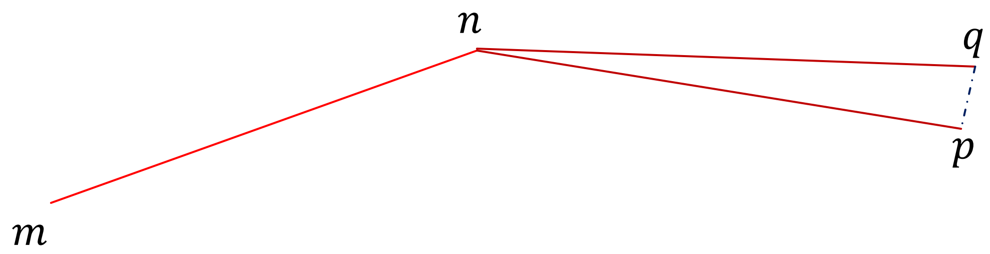


« La droite tp, écart naissant de la courbe à sa tangente, exprime la courbure demandée. »

- But we can generalize this idea:

  « Mais il ne s'agit là, je le répète, que de la courbure *absolue* ; et on pourrait aussi considérer des courbures ou déviations *relatives*. Deux courbes ayant un élément ds commun, les deux éléments qui suivent ds sur ces courbes respectives forment un angle infiniment petit dv, que nous nommerons l'angle de contingence relatif ; et le rapport de dv à ds mesurera la *courbure* ou la *déviation relative* des deux courbes. » [Liouville, 1850, 568]

« Cette droite *pq* mesurera la courbure ou déviation relative de la courbe *mnq* par rapport à *mnp* ; et nous dirons qu'elle la mesure en grandeur et en direction. »



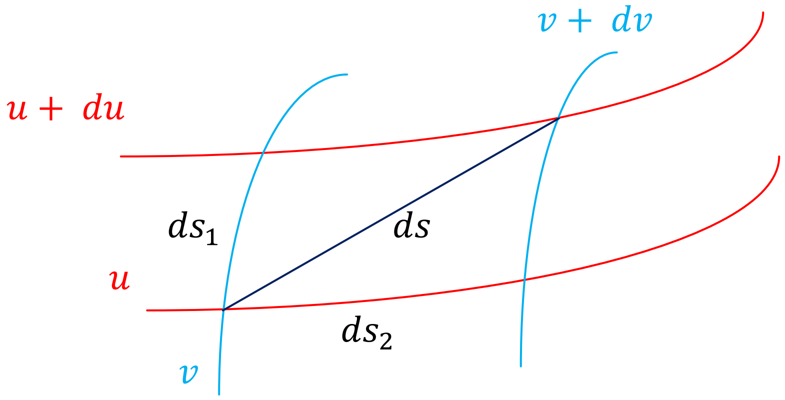
« En y réfléchissant, le lecteur verra qu'on peut tirer un grand parti de ces idées générales, sur lesquelles nous ne voulons pas insister ici. Bornons-nous à signaler parmi les courbures relatives, celle d'une courbe tracée sur une surface, par rapport à la ligne géodésique tangente. J'ai proposé pour la désigner le nom expressif de courbure géodésique, que M. Bonnet a bien voulu adopter dans un Mémoire remarquable. »

From the equation of geodesics to geodesic curvature

- Références à Gauss – *Disquisitiones generales circa superficies curvas*
- Réduction de la métrique :

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2$$

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2$$



- A new simplification

  « Une simplification nouvelle aura lieu si l'on réduit à l'unité un des coefficients E, G. Cette réduction s'effectue, du reste, sans que la formule pour ds^2 cesse de convenir à une surface quelconque. »

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}dv^2$$

- Another reduction of the metric that is more difficult to obtain but is very useful

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

  « Pour effectuer la réduction dont nous parlons, il faudrait, il est vrai, savoir intégrer une certaine équation différentielle du premier ordre, [...]. Mais le seul fait de la possibilité d'une telle résolution est très remarquable, et donne lieu à des conséquences intéressantes. »

- The equation of geodesics in the general case

  « M. Gauss a donné les équations qui les [les géodésiques] concernent dans le cas le plus général […]. Mais elles sont très compliquées.

- The usefulness of reduction – when the coordinate lines are orthogonal, we get:

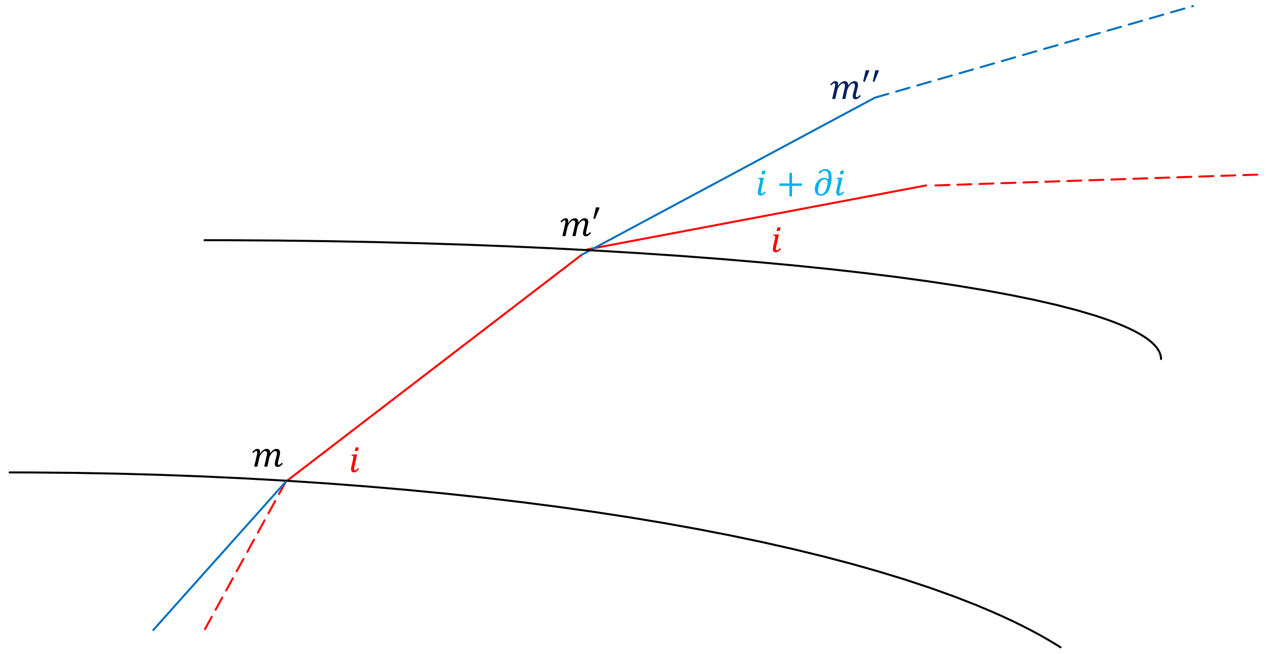
  « Alors, i étant l'angle sous lequel cette ligne vient couper successivement les diverses courbes représentées par l'équation $u = constante$, on trouve

$$di = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{dG}{du}dv - \frac{dE}{dv}du\right).$$

- When the metric has the form $ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$, the equation of geodesics is very simple (i is the angle with the lines (α)) :

$$di = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}d\beta - \frac{d\lambda}{d\beta}d\alpha\right).$$

- The deduction of the geodesic curvature from the equation of geodesics



$\partial i - di$ is the angle of geodesic contingency and the geodesic curvature is given by the formula :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial i - di}{ds}.$$

The equation of geodesics gives ∂i. So, in the case where the coordinate lines are orthogonal, we have

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{di}{ds} + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{dG}{du}\frac{dv}{ds} - \frac{dE}{dv}\frac{du}{ds}\right).$$

By definition, $\frac{du}{ds} = \frac{sin\, i}{\sqrt{E}}$ and $\frac{dv}{ds} = \frac{cos\, i}{\sqrt{G}}$, so when we apply to the lines $u = cste$ et $v = cste$, the formula gives (where ρ_1 et ρ_2 are the geodesic curvatures of the coordinate lines)

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{dE}{dv}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{dG}{du}$$

« Il résulte de là, pour $\frac{1}{\rho}$, en général, cette expression assez remarquable

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{di}{ds} + \frac{\cos i}{\rho_2} + \frac{\sin i}{\rho_1}. »$$

Geodesics defined as *minima*

$\Downarrow$

Equation of geodesics (variational calculus)

$\Downarrow$

Expression of the geodesic curvature

Definition of the geodesic curvature

$\Downarrow$

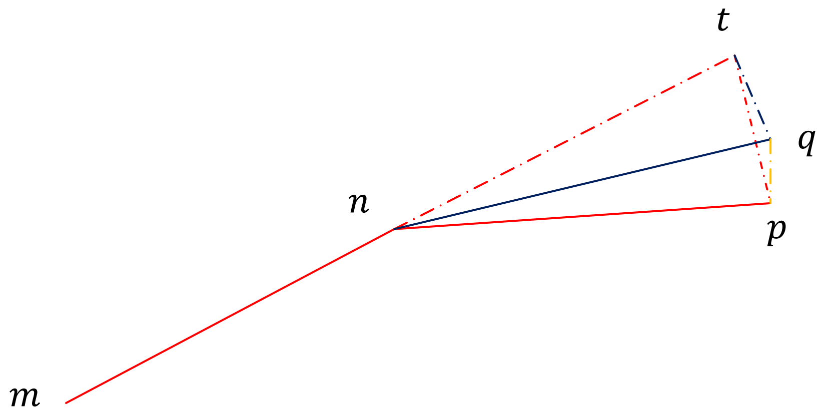
Geometrical expression for the geodesic curvature

$\Downarrow$

Equation of geodésics

« Au reste, on pourrait aussi trouver directement la valeur de ρ, sans se servir de la théorie des lignes géodésiques, et tirer, au contraire, de cette valeur l'équation fondamentale de ces lignes en observant que pour les lignes géodésiques seules on a $\rho = \infty$. Un des moyens les plus simples qu'on puisse employer pour cela est de rattacher la valeur de la courbure géodésique à celle de la courbure absolue » [Liouvillee 1850, 575]

mn, np, … the elements of the curve (which are all supposed equal), mn, nq, … the elements of the geodesic which is tangent to the curve.



Interprétation du triangle infinitésimal tqp

tp	courbure absolue de la courbe mnp
tq	courbure absolue de la géodésique mnq
qp	courbure géodésique de la courbe mnp

« De là […] une expression du rayon ρ de courbure géodésique au moyen du rayon de courbure absolu R de mnp ... En désignant en effet par θ l'angle tpq, qui n'est autre que l'angle du plan osculateur de mnp avec le plan tangent, vous aurez le rapport de tq à $tp =$ $sin\,\theta$, c'est-à-dire le théorème de Meusnier, puis

$$\frac{qp}{tp}\ ou\ \frac{R}{\rho} = \ cos\,\theta,$$

d'où

$$\rho = \frac{R}{cos\,\theta}$$ ». [Liouville 1850, 576]

Gaston Darboux
(1842-1917)

One end of this story – Darboux's formulas

The integration of geodesic curvature in a large framework

The theory of moving frames

Let (u, v) the coordinates with which we describe a surface. Darboux reduced study of surfaces to « celle du mouvement d'un système mobile » (what we call nowadays 'moving frames') :

> « M désignant un point de la surface, construisons un trièdre trirectangle (T) dont le sommet soit en M et dont l'axe des z soit la normale en M ; les axes des x et des y seront, par suite, situés dans le plan tangent à la surface. Ces axes seront parfaitement déterminés si l'on connaît, pour chaque position du point M, l'angle de l'axe des x avec l'une des lignes coordonnées, par exemple avec la tangente à la courbe v =const. »

Let (x, y, z) the coordinates of a point M in the moving frame (« trièdre mobile ») (T), Darboux got formulas that give « les projections de son déplacement sur les axes du trièdre mobile, quand u et v prendront des accroissements du, dv » :

$$\begin{cases} D_x = dx + \xi du + \xi_1 dv + (q du + q_1 dv)z - (r du + r_1 dv)y, \\ D_y = dy + \eta du + \eta_1 dv + (r du + r_1 dv)x - (p du + p_1 dv)z, \\ D_x = dz \qquad\qquad\qquad\qquad + (p du + p_1 dv)z - (q du + q_1 dv)x. \end{cases}$$

If ds designates the differential of the curve which is described by the origin (« la différentielle de l'arc de courbe décrit par l'origine ») et ω the angle between the tangent of that curve and the x-coordinate line (« l'angle que fait la tangente à cette courbe avec l'axe des x du trièdre mobile »), we get :

$$ds\, cos\, \omega = \xi du + \xi_1 dv, \qquad ds\, sin\, \omega = \eta du + \eta_1 dv.$$

La définition de la courbure principale, de la courbure géodésique, de la courbure normale et de la torsion géodésique en termes des rotations du repère mobile.

- La mise en place du cadre de raisonnement :

« Nous savons que si, par un point fixe de l'espace, on mène une parallèle à la tangente de la courbe, d'une longueur égale à l'unité, la vitesse de l'extrémité de cette parallèle, en supposant que l'arc de la courbe soit égal au temps, sera égal, en grandeur, à la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe et aura la direction et le sens de la normale principale.
Or, si, par le même point, on mène des parallèles aux arêtes du trièdre mobile, on formera [un] nouveau trièdre, dont les rotations seront, quand on se déplacera sur la courbe,

$$\frac{pdu + p_1dv}{ds}, \frac{qdu + q_1dv}{ds}, \frac{rdu + r_1dv}{ds}. \text{ »}$$

- Then, if ϖ designate the angle of the normal to the surface with the osculating plane of the curve

$$\frac{ds \ \ cos\,\varpi}{\rho} = sin\,\omega\,(pdu + p_1 dv) - cos\,\omega\,(qdu + q_1 dv),$$

$$\frac{ds \ \ sin\,\varpi}{\rho} = d\omega + rdu + r_1 dv.$$

- The first formula gives the curvature of the normal section which is tangent to the curve, what we call normal curvature, (« ce qu'on appelle la *courbure normale* »).

- The second formula « définit un élément […] qui joue un rôle important dans la théorie de la déformation des surfaces. Considérons le cylindre projetant la courbe sur le plan tangent. D'après le théorème de Meusnier, $\frac{sin\,\varpi}{\rho}$ sera la courbure de la section normale du cylindre tangente à la courbe, c'est-à-dire la courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent.

  J. Liouville, qui l'a considérée après O. Bonnet, lui a donné le nom, accepté par tous les géomètres, de *courbure géodésique*. »

With the same notations, « nous savons que si, par un point fixe, nous menons une droite de longueur égale à 1, parallèle à la binormale, l'extrémité de cette droite aura, quand on se déplacera sur la courbe, un déplacement égal à $-\frac{ds}{\tau}$ et la direction de ce déplacement sera celle de la normale principale ».

Darboux got the formula that gives the geodesic torsion in terms of rotations of the moving frame (trièdre mobile) :

$$\frac{1}{\tau} + \frac{d\varpi}{ds} = \frac{p\,du + p_1 dv}{ds} \cos\omega + \frac{q\,du + q_1 dv}{ds} \sin\omega.$$