
"Segundo Encuentro Regional
de Teoría de Números"
Córdoba, 1 y 2 de junio de 2012

Teorema de los Números Primos

Ramón Sellanes

Segundo Encuentro Regional de Teoría de Números
Cordoba Argentina
1 de junio de 2012

Definición

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primo } : p \leqslant x\} = \sum_{p \leqslant x} 1$$

1792 Gauss conjetura que:

$$\pi(x+c) - \pi(x) \underset{c \ll x}{\approx} \frac{c}{\log(x)} \qquad \left(Li(x) = \int_c^x \frac{1}{\log(t)} dt \right)$$

1789 Legendre conjetura

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

1896 Hadamard y de la Vallée Poussin demuestran la conjetura.

Una demostración "elemental" fue hallada en 1949 por Selberg y Erdös su demostración no recorre la función ζ de Riemann ni la teoría de funciones complejas pero es bastante intrincada.

Lema (1 Fórmula del producto de Euler)

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \ si \ \mathrm{Re}(s) > 1$$

Demostración

Sea $P(x) = \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \left(\frac{1}{p^s}\right)^2 + \dots\right)$

Dicho producto tiene un número finito de términos de la serie $\sum \left(\frac{1}{p^s}\right)^n$ que converge absolutamente si $\mathrm{Re}(s) > 1$, luego podemos multiplicar y reordenar sus términos sin que se altere su suma.

Un término general tiene la forma:

$$\left(\frac{1}{p_1^s}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{p_2^s}\right)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{p_r^s}\right)^{\alpha_r} = \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r})^s}$$

Por el teorema fundamental de la aritmética podemos escribir

$$P(x) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}$$

Donde $A \subseteq \mathbb{N}$ consta de todos los n cuya descomposición tiene factores primos $\leqslant x$.
Por consiguiente

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - P(x) = \sum_{n \in B} \frac{1}{n^s}$$

Donde $B \subseteq \mathbb{N}$ es el conjunto de los n que tienen por lo menos un factor primo en su descomposición $> x$

Ahora

$$\left|\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}-P(x)\right|\leqslant\sum_{n\in B}\left|\frac{1}{n^s}\right|\leqslant\sum_{n>x}\left|\frac{1}{n^s}\right|$$

Y como $\sum\frac{1}{n^s}$ converge por ser $\mathrm{Re}(s)>1$ se tiene que $\sum_{n>x}\left|\frac{1}{n^s}\right|\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$
luego

$$P(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)$$

por otro lado

$$P(x)=\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p^s}+\left(\frac{1}{p^s}\right)^2+\dots\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Lema (2)

Se tiene que la función $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se extiende a una función holomorfa en $\mathrm{Re}(s) > 0$

Demostración

Para $\mathrm{Re}(s) > 1$ tenemos que

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx$$

y como

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| = \left| s \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{du}{u^{s+1}} dx \right| \leqslant \max_{n \leqslant u \leqslant n+1} \left| \frac{s}{u^{s+1}} \right| = \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)} + 1}$$

y $\sum \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$ converge si $\mathrm{Re}(s) > 0 \Rightarrow \sum \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx$ converge uniformemente en $\mathrm{Re}(s) > 0$. $\square$

Definición

Sean $s \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos la función de Chebychev $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la expresión

$$\nu(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$$

Lema (3)

La función de Chevychev cumple que

$$\nu(x) = O(x)$$

Demostración

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{2n} \geqslant \binom{2n}{n} \geqslant \prod_{n<p\leqslant 2n} p =$$

$$= e^{\left(\log \prod_{n<p\leqslant 2n} p\right)} = e^{\left(\sum_{n<p\leqslant 2n} \log p\right)} = e^{\nu(2n)-\nu(n)}$$

tomando logaritmo

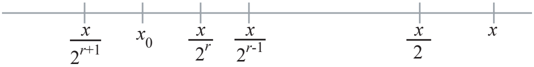
$$2n\log 2 \geqslant \nu(2n) - \nu(n)$$

Sea un x arbitrario y determinamos n para que $n < \frac{x}{2} \leqslant n+1$ entonces

$$\begin{aligned} \nu(x) &\leqslant \nu(2n+2) \leqslant \nu(n+1) + (2n+2)\log 2 \\ &\leqslant \nu(\frac{x}{2}+1) + (x+2)\log 2 \\ &\leqslant \nu(\frac{x}{2}) + \log(\frac{x}{2}+1) + (x+2)\log 2 \end{aligned}$$

Si $C > \log 2$ se tiene que $\boxed{\nu(x) - \nu(\frac{x}{2}) \leqslant Cx}$ para $x \geqslant x_0(C)$.

Considere los puntos



Usando $\nu(x) - \nu(\frac{x}{2}) \leqslant Cx$ para los puntos que están a la derecha de x_0

$$\begin{aligned}
\nu(x) - \nu\left(\frac{x}{2}\right) &\leqslant Cx \\
\nu\left(\frac{x}{2}\right) - \nu\left(\frac{x}{2^2}\right) &\leqslant C\frac{x}{2} \\
&\vdots \\
\nu\left(\frac{x}{2^r}\right) - \nu\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right) &\leqslant C\frac{x}{2^r}
\end{aligned}$$

Sumando

$$\nu(x) - \nu(x_0) \leqslant \nu(x) - \nu\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right) \leqslant Cx + \cdots + C\frac{x}{2^r}$$

O sea que $\nu(x) \leqslant 2C \cdot x + O(1)$

Definición

Se considera la función $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por la expresión

$$\phi(s) = \sum_p \frac{\log(p)}{p^s}$$

Lema (4)

La función zeta de Riemann no se anula en $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ *y* $\phi(s) - \frac{1}{s-1}$ *es holomorfa en* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$

Demostración

Para $\mathrm{Re}(s) > 1$ por la convergencia del producto de Euler implica que $\zeta(s) \neq 0$ y de

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s})$$

tomando logaritmo, y por ser el producto de logaritmos la suma de logaritmos

$$-\log \zeta(s) = \sum_p \log(1 - p^{-s})$$

y derivando

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log(p)p^{-s}}{1 - p^{-s}} = \sum_p \frac{\log(p)}{p^s - 1}$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \phi(s) + \sum_p \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)}$$

la suma final converge uniformemente para $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. entonces por el lema 2 $\phi(s)$ se extiendo a una función holomorfa en $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.
y como $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tiene polos donde $\zeta(s)$ tiene polos y ceros, y además todos sus polos son simples, se tiene que $\phi(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$, y el resto de los polos de ϕ están en los ceros de ζ.

En $\mathrm{Re}(s) > 1$ la función $\zeta(s)$ no tiene ceros por el lema 1, entonces basta ver que $\zeta(s)$ no tiene cero en $\mathrm{Re}(s) = 1$ para ver que $\phi(s) - \frac{1}{s-1}$ se extiende a una función holomorfa en $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$.
Supongamos que existe un cero en $s_0 = 1 + \alpha i$, $(\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$, de orden μ y eventualmente otro cero de orden ν en $s = 1 + 2i\alpha$, (con $\mu, \nu \geqslant 0$), por el lema 2

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon\phi(1+\epsilon) = 1, \ \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon\phi(1+\epsilon \pm \alpha i) = -\mu, \ \text{ y } \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon\phi(1+\epsilon \pm 2\alpha i) = -\nu$$

Haciendo la siguiente suma

$$\begin{aligned} \phi(1+\epsilon-2\alpha i) &+ 4\phi(1+\epsilon-\alpha i) + 6\phi(1+\epsilon) + 4\phi(1+\epsilon+\alpha i) + \\ &+ \phi(1+\epsilon+2\alpha i) = \sum_p \frac{\log(p)}{p^{1+\epsilon}} \left(p^{\frac{\alpha i}{2}} + p^{-\frac{\alpha i}{2}}\right)^4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que $6 - 8\mu - 2\nu \geqslant 0$ y como $\mu, \nu \geqslant 0$ se tiene que $\mu = 0$

□

Lema (5)

Dada la función de Chebychev $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\nu(x) - x}{x^2}\, dx \text{ es converge}$$

Demostración

Recordando que $\nu(x) = \sum_{p \leqslant x} \log(p)$ podemos escribir

$$\phi(s) = \sum_p \frac{\log(p)}{p^s} = \sum_{p_i} \frac{\nu(p_i) - \nu(p_{i-1})}{p_i^s}$$

conviniendo que $p_0 = 1$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\nu(p_i)}{p_i^s} - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\nu(p_i)}{p_{i+1}^s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \nu(p_i) \left(\frac{1}{p_i^s} - \frac{1}{p_{i+1}^s} \right)$$

Entonces

$$\phi(s) = \sum_{p_i} \nu(p_i) \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{s}{x^{s+1}}\, dx$$

y como $\nu(x)$ es constante en $[p_i, p_{i+1})$ y es igual a $\nu(p_i)$ nos queda

$$\phi(s) = s \sum_{p_i} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\nu(x)}{x^{s+1}}\, dx = s \int_{1}^{+\infty} \frac{\nu(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

por otro lado

$$\frac{1}{s-1} = \int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^{s+1}}\, dx \text{ si } \operatorname{Re}(s) > 1$$

Entonces para $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\frac{\phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\nu(s) - x}{x^{s+1}}\, dx$$

Para $\mathrm{Re}(z) > 0$ se tiene que

$$\frac{\phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_1^{+\infty} \frac{\nu(x) - x}{x^{z+2}} dx$$

Ahora por el lema 4 se tenía que $\phi(s) - \frac{1}{s-1}$ se extiende a una función holomorfa en $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$, luego

$$\phi(z+1) - \frac{1}{z} = h(z) \text{ con } h \text{ holomorfa en } \mathrm{Re}(z) \geqslant 0$$

y entonces

$$\frac{\phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{1/z + h(z)}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{1 + zh(z) - z - 1}{z(z+1)} = \frac{h(z) - 1}{z+1}$$

por lo que si definimos a g como

$$g(z) = \frac{\phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$$

por lo antes expuesto se extiende a una función holomorfa en $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.

Ahora para $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$g(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\nu(x) - x}{x^{z+2}}\, dx$$

haciendo el cambio de variable $x = e^t$ tenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\nu(e^t) - e^t}{(e^t)^{z+2}} e^t\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left(\nu(e^t)e^{-t} - 1\right)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$$

Donde $f(t) = \nu(e^t)e^{-t} - 1$, que por el lema 3 es acotada.
Por otra lado haciendo el mismo cambio de variable $x = e^t$ tenemos que

$$\int_0^{e^T} \frac{\nu(x) - x}{x^2} = \int_0^T f(t)\, dt \tag{1}$$

para probar el lema tenemos que probar que existe el $\lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(t)\, dt$, y para ello aplicamos el siguiente teorema:

Teorema

Sea $f(t)$, $(t \geqslant 0)$ *una función acotada y localmente integrable, definimos*

$$g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt \ \textit{en} \ \mathrm{Re}(z) > 0$$

entonces si $g(z)$ *se extiende por continuidad analítica a una función holomorfa en* $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$ *se tiene que*

$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(t)\, dt$$

existe y es igual a $g(0)$

Como nuestra g está en las condiciones del teorema por la última igualdad (1) prueba el lema. $\square$

Lema (6)

Siendo $\nu(x) = \sum_p \log(p)$ *se tiene que asintóticamente*

$$\nu(x) \sim x.$$

Demostración

Si suponemos que para un cierto $\lambda > 1$ tenemos que $\nu(x) \geqslant \lambda x$ para valores de x arbitrariamente grandes, entonces como $\nu(x)$ es creciente se tiene que

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\nu(t) - t}{t^2}\, dt \geqslant \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - s}{s^2}\, ds = \delta(\lambda) > 0$$

Por otra parte, usando el lema 5 se tiene que para cualquier $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ de forma que si $K_1, K_2 > K$ entonces

$$\left| \int_{K_1}^{K_2} \frac{\nu(x) - x}{x^2}\, dx \right| < \epsilon$$

por lo que dicho λ no existe.

Similar razonamiento si para cierto $\lambda < 1$, se tiene que $\nu(x) \leqslant \lambda x$ para valores de x arbitrariamente grandes, entonces para $t \leqslant x$

$$\nu(t) \leqslant \nu(x) \leqslant \lambda x,$$

entonces

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\nu(t) - t}{t^2}\, dt \leqslant \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - s}{s^2}\, ds = \delta(\lambda) < 0$$

Otra ves esto no es posible por el lema 5.
Luego no se cumple que

$$\beta = \lim \sup_{x \to +\infty} \frac{\nu(x)}{x} > 1 \text{ y } \alpha = \lim \inf_{x \to +\infty} \frac{\nu(x)}{x} < 1$$

y por lo tanto

$$\beta = \lim \sup_{x \to +\infty} \frac{\nu(x)}{x} \leqslant 1 \text{ y } \alpha = \lim \inf_{x \to +\infty} \frac{\nu(x)}{x} \geqslant 1$$

luego $\beta = 1 = \alpha$

Teorema (Teorema de los números primos)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

Demostración

Sea

$$\nu(x) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{p \leqslant x} \log(p) \leqslant \log(x) \sum_{p \leqslant x} 1 = \log(x)\pi(x)$$

haciendo limite inferior y teniendo en cuenta el lema 6 nos queda

$$\lim_{x \to +\infty} \inf \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \geqslant \lim_{x \to +\infty} \inf \frac{\nu(x)}{x} = 1$$

Sea ahora ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$, se tiene

$$\nu(x) \geqslant \sum_{x^{1-\epsilon} \leqslant p \leqslant x} \log(p) \geqslant (1-\epsilon) \sum_{x^{1-\epsilon} \leqslant p \leqslant x} \log(x)$$

Como $\log(x)$ no depende de p y usando la definición de π nos queda

$$\nu(x) \geqslant (1-\epsilon)\log(x) \sum_{x^{1-\epsilon} \leqslant p \leqslant x} 1 = (1-\epsilon)\log(x)\left(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})\right)$$

Ahora como

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \sup \frac{\log(x)\pi(x^{1-\epsilon})}{x} &\leqslant \lim_{x \to +\infty} \sup \frac{\log(x) \cdot x^{1-\epsilon}}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \sup \frac{\log(x)}{x^{\epsilon}} \underset{\epsilon > 0}{=} 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \sup \frac{\pi(x)\log(x)}{x} \leqslant \frac{1}{1-\epsilon} \lim_{x \to +\infty} \sup \frac{\nu(x)}{x} = \frac{1}{1-\epsilon}$$

para cada ϵ luego

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1$$

FIN

GRACIAS