

**Instancia Nacional
Prueba Teórica
Nivel 1**



Problema 1

Globo meteorológico.

Aunque parezca simple programar el lanzamiento de un globo meteorológico, comparado con el lanzamiento de un satélite, es necesario hacer una diagramación correcta pues es muy importante el equipamiento que lleva suspendido como la información que se desea obtener. Debido a que resolver el problema real es complejo, te desafío a que hagamos algunos cálculos preliminares, lo cual implicará realizar algunas aproximaciones para simplificar los cálculos, que nos permitan estimar el comportamiento del globo meteorológico. Un globo meteorológico, usualmente construido de látex y lleno con hidrógeno (H_2) por su bajo costo, se utiliza para elevar equipamiento que permite medir distintos parámetros de interés meteorológico en función de la altura (presión, temperatura, humedad relativa, velocidad y dirección del viento, concentración de ozono, etc.). Debido a que la presión atmosférica disminuye con la altura el globo aumenta su volumen hasta que se rompe, lo que determina la altura máxima que alcanzará. Puede llegar aproximadamente a una altura de 30000 m y en algunos casos alcanzar alturas del orden de 50000 m



Para los cálculos vamos a suponer que el globo que utilizaremos tiene forma esférica y que el gas en su interior (H_2) se comporta como un gas ideal, el cual está sometido a la presión atmosférica y a la presión que le ejerce el globo. La presión que ejerce el globo sobre el gas depende del radio r que tiene el globo y puede aproximarse por

$$P(r) = K \left[\frac{r_0}{r} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^7 \right]$$

donde K es una constante que depende del globo y r_0 es su radio interno cuando no está inflado.

Los datos que disponemos para realizar los cálculos son:

Presión atmosférica: 97000 Pa	Temperatura ambiente: 17 °C
$K = 80000\text{ N/m}^2$	$r_0 = 10\text{ cm}$
Densidad del latex : $0,96\text{ g/cm}^3$	Espesor de la pared del globo desinflado: $1,5\text{ mm}$
Densidad del aire: 1.29 kg/m^3	Masa molar del H_2 : 2 g/mol
Masa del equipamiento suspendido: 440 g	

- Calcule cuántos moles de H_2 contiene el globo cuando se lo infla hasta un diámetro interno de 1 m .
- Determine el peso total del globo inflado
- Calcule el empuje que se ejerce sobre el globo en el momento de lanzarlo.
- Calcule cuál es la fuerza neta aplicada sobre el globo meteorológico (incluido el equipamiento) al momento de lanzarlo.
- Determine la aceleración del globo al momento de lanzarlo.

Sabemos que cuando el globo asciende el aire le ejerce un rozamiento (fuerza viscosa) cuyo módulo para una esfera es $F_v = 6\pi R \eta v$, donde R es el radio de la esfera, η es la viscosidad del aire y v es la velocidad del globo.

- Calcule cuál es la velocidad límite que alcanzaría el globo en su ascenso (sólo teniendo en cuenta los parámetros al momento del lanzamiento)

Si el mínimo espesor de la pared del globo para que el globo no se rompa es 0,02 mm.

g) Calcule cuál es el radio del globo justo antes de explotar.

Constantes que le pueden ser de utilidad:

$$R = 8.31 \text{ J/(mol K)} \quad \eta = 1,71 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s} \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

Problema 2

Diseño de un vehículo eléctrico.

En los últimos años ha habido un gran auge en la fabricación de automóviles eléctricos. Casi todas las marcas más importantes tienen modelos ya a la venta o modelos diseñados para el futuro. Las prestaciones de algunos de ellos son extraordinarias. Sin embargo la historia del automóvil eléctrico para nada es una historia que comenzó en los últimos años. Por el contrario en las dos primeras décadas del siglo XX hubo una proliferación de modelos de automóviles eléctricos, llegando en muchos casos a avances notables. El objetivo del presente problema es estudiar, desde el punto de vista de la física, algunas cuestiones mecánicas y eléctricas en el diseño de un automóvil eléctrico antiguo.

Las características generales del vehículo son:

- Motor eléctrico de CC, 24 Volts y 1HP de potencia. La máxima velocidad de giro del eje del motor es 1750 RPM (revoluciones por minuto).
- La masa del vehículo es de 400 kg.
- El vehículo posee una transmisión a cadena, formada por un piñón de 6cm de diámetro, montado sobre el eje del motor, y una corona de 24 cm, montada sobre el eje trasero del vehículo. El esquema de la transmisión se muestra en la figura 1. La foto de la figura 2 muestra esta transmisión para el caso de un vehículo Baker de 1907. La corona está montada de forma tal que tracciona sobre los dos semiejes traseros, y por lo tanto sobre las dos ruedas traseras.
- La distancia entre los ejes del vehículo es $L = 175\text{cm}$ y la posición del centro de masa está dada por las coordenadas $x_1 = 75\text{cm}$ y $h = 85\text{cm}$ (ver figura 3).
- El vehículo tiene tres velocidades hacia adelante, controladas a través de resistencias – como se muestra en el diagrama de la figura 4 – y marcha atrás. Con el uso de esas resistencias, y de acuerdo a la posición de las llaves L1, L2 y L3, se logra que las **velocidades de giro del eje del motor** sean: 1ª marcha --- $1/3$ de la velocidad máxima de giro del eje del motor; 2ª marcha --- $2/3$ de la velocidad máxima de giro del eje; 3ª marcha --- velocidad máxima de giro del eje, es decir 1750 RPM.
- Las ruedas de este vehículo son de 75cm de diámetro y de masa $m = 35 \text{ kg}$ cada una. Considérelas como un cilindro macizo.

I.- Diseño Mecánico

- Calcule la fuerza que ejerce el pavimento sobre cada una de las ruedas delanteras (F_{z1}) y sobre cada una de las ruedas traseras (F_{z2}), cuando el vehículo está en reposo. Suponga que el peso del vehículo se distribuye de tal forma que las fuerzas sobre las ruedas traseras son iguales entre sí, y las fuerzas sobre las ruedas delanteras son iguales entre sí. Ver figura 3.
- Encuentre expresiones para estas fuerzas, F_{z1} y F_{z2} , cuando el vehículo tiene una aceleración a_x , a lo largo del eje x. Para este cálculo tenga presente que el vehículo es de tracción trasera.
- Teniendo en cuenta los datos provistos en las características del vehículo, calcule el torque capaz de entregar el motor. Aquí tenga presente que 1HP corresponde a 0.764 Kilowatts.
- Calcule el torque que la corona transmite a las ruedas traseras.
- Calcule la aceleración máxima que pueden proveer el motor y la transmisión instalados en el vehículo.

Datos a tener en cuenta:

- i) El momento de inercia, de un cilindro macizo de radio b y masa m , a lo largo del eje del cilindro es:

$$I = \frac{1}{2}mb^2$$

- ii) En el punto f) desprecie el momento de inercia del eje que une las ruedas traseras.
- iii) Suponga que sobre ninguna parte mecánica móvil del vehículo hay rozamiento.

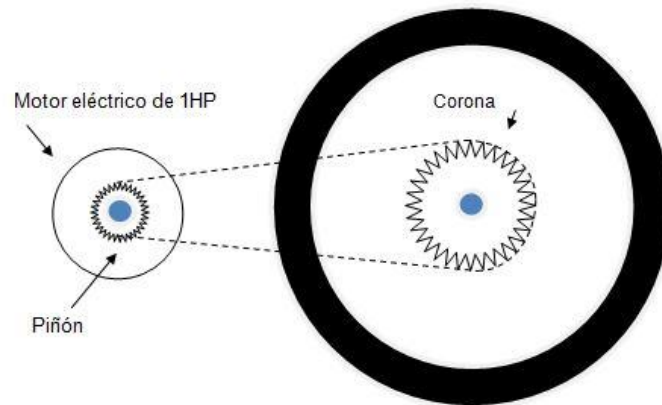


Figura 1: Esquema de la transmisión a cadena



Figura 2: Foto de la transmisión a cadena de un vehículo eléctrico Baker 1907

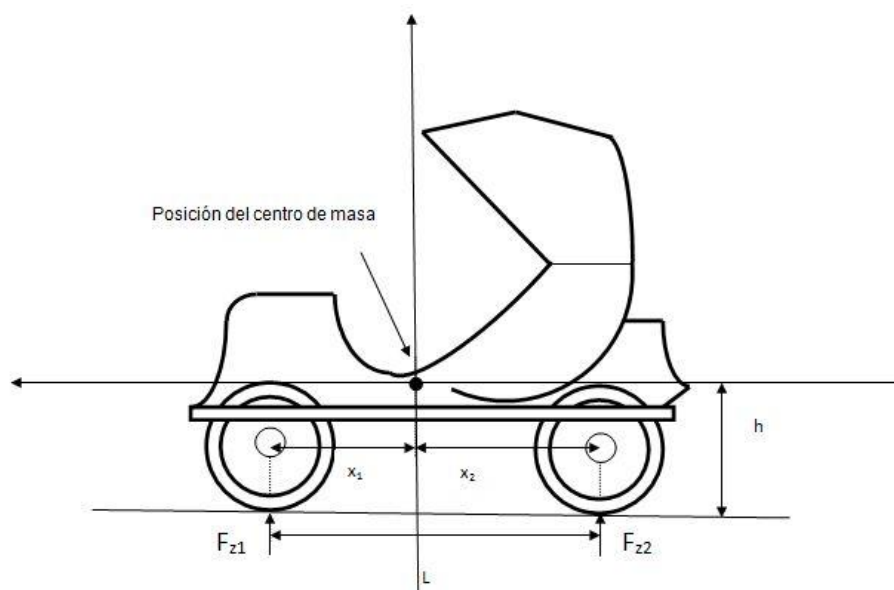


Figura 3: Esquema del vehículo eléctrico antiguo

II.- Diseño eléctrico.

- f) Calcule la máxima intensidad de corriente que debe proveer la batería del vehículo.
- g) La figura 4 muestra el diagrama eléctrico de la caja de comando de nuestro auto eléctrico. Calcule los valores de las resistencias R_1 y R_2 para lograr las velocidades indicadas en las características generales del vehículo, Suponga que las revoluciones del motor es directamente proporcional a la corriente eléctrica que por él circula.

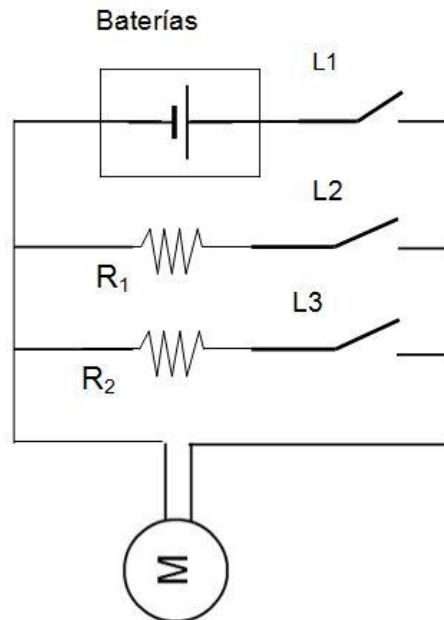


Figura 4. Esquema de conexiones de la caja de control del vehículo eléctrico

Problema 3

Hagamos bailar a los imanes de los núcleos.

Los núcleos de los átomos poseen una propiedad física cuántica, sin análogo clásico, denominada espín nuclear. Una particularidad del espín nuclear es que, ante la presencia de un campo magnético estático y homogéneo $\vec{B}_0$, se comportan como si fueran pequeños imanes con un momento magnético $\vec{\mu} = \gamma \hbar \vec{I}$, donde $\vec{I}$ es el “vector cuántico” momento angular del espín nuclear, γ la constante geomagnética del núcleo y $\hbar$ la constante de Planck dividido 2π . Al valor del espín nuclear se lo denota por la letra I y se llama número cuántico de espín. Excepto por el hecho que la proyección de $\vec{I}$ en la dirección del campo magnético externo, ver Figura 1, adopta solo ciertos valores discretos (cuantificación) el comportamiento del momento magnético de los espines se puede modelar por las reglas del electromagnetismo clásico.

Vamos a tratar con núcleos de Hidrógeno (protones), que son muy abundantes en el cuerpo humano. Para estos núcleos $I = 1/2$.

La proyección de $\vec{I}$ sobre el eje z , toma para el caso del protón, dos valores $m = +1/2$ y $m = -1/2$.

Esto quiere decir que tendremos algunos espines con su proyección sobre la dirección del eje z apuntado paralelos al campo externo y otros apuntado antiparalelos al campo externo. Por cuestiones energéticas tendremos mas espines apuntando paralelos al campo $\vec{B}_0$ que antiparalelos al campo $\vec{B}_0$. Esto dará origen a una magnetización neta en la dirección de $\vec{B}_0$, ver Figura 1.

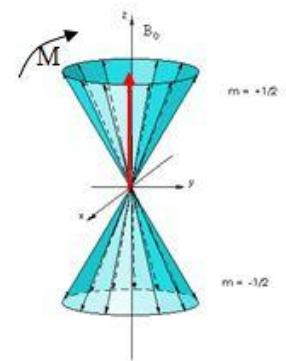


Figura 1

La magnetización total que surge de los espines nucleares de la muestra, es una cantidad vectorial y está dada por

$$\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i \quad (\text{ec. 1})$$

donde $\vec{\mu}_i$ es el momento magnético del núcleo i .

Usando que $\vec{\mu}_i = \gamma \hbar \vec{I}_i$, la magnetización de la muestra se puede escribir como

$$\vec{M} = \gamma \hbar \vec{J} \quad (\text{ec. 2})$$

donde $\vec{J} = \sum_i \vec{I}_i$ es el momento angular total de espín de la muestra. Si la muestra se coloca en presencia de un campo magnético $\vec{B}_0$ uniforme, como es el caso de un experimento de Resonancia Magnética Nuclear (RMN), se ejerce un torque $\vec{T}_M$ sobre el vector magnetización donde el torque está dado por

$$\vec{T}_M = \vec{M} \times \vec{B}_0 \quad (\text{ec.3})$$

Se puede mostrar que la magnetización precesa (movimiento de trompo) alrededor del campo magnético a una frecuencia angular constante de módulo

$$\omega = \gamma B_0 \quad (\text{ec.4})$$

(ver Figura 2).

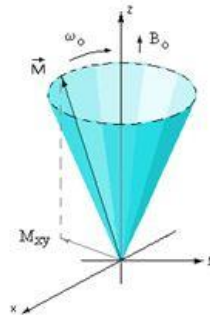


Figura 2

La expresión de la magnetización inducida por los espines nucleares de protones a temperatura ambiente (T_a) es

$$M = \frac{\mu_0 \gamma^2 \hbar^2 n}{4 k_B T_a} B_0 = 4.04 \times 10^{-9} B_0 \quad (\text{ec.5})$$

Donde n es el número de espines nucleares de protones por unidad de volumen, μ_0 la permeabilidad magnética del vacío, k_B la constante de Boltzmann y T_a la temperatura ambiente en K. La unidad de M es el Tesla ($1 \text{ Tesla} = 1 \text{ V.s/m}^2$).

En un experimento de RMN se usa sacar del equilibrio la magnetización M mediante la aplicación de un campo magnético alterno $\vec{B}_1$ perpendicular al campo externo $\vec{B}_0$. Este campo $\vec{B}_1$ se aplica durante unos pocos microsegundos. La situación luego de aplicar este campo $\vec{B}_1$ es la que se muestra en la Figura 3. Entonces la magnetización $\vec{M}$ girará alrededor del campo $\vec{B}_0$ en el plano xy .

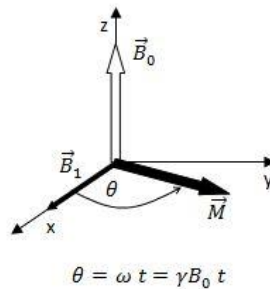


Figura 3

Para detectar la señal generada por los núcleos en un experimento de RMN se coloca una bobina, digamos a lo largo del eje x , de modo que esta detecte la variación de flujo de campo magnético a través de ella, generada por la magnetización rotante $\vec{M}$ en el

plano xy. En nuestro caso particular la magnitud de la magnetización a lo largo del eje de la bobina tendrá una dependencia temporal dada por la ecuación 6

$$M(t) = M_0 \sin(\omega t) \quad (\text{ec.6})$$

con $\omega = 64.2 \times 2\pi$ MHz (MHz = 1×10^6 Hz).

Para simplificar los cálculos supondremos que $M(t)$ varía linealmente con el tiempo, es decir aproximamos la función seno por una función diente de sierra, ver Figura 4.

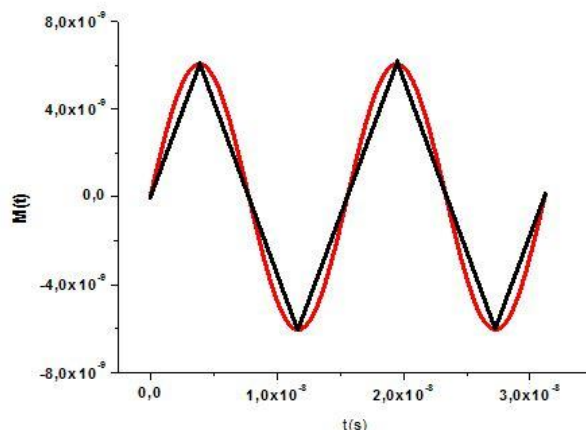


Figura 4

Asumiendo que la relación entre campo magnético y magnetización está dado por

$$B_M = M \quad (\text{ec.7})$$

y el valor máximo de M a lo largo de la bobina es $M = 6.06 \times 10^{-9}$ T (1 Tesla = 1 V.s/m^2).

- A partir de la ecuación 5 encuentre el valor de B_0 .
- Determine el periodo de $M(t)$ (ecuación 6).

El circuito resonante

La bobina utilizada en un experimento de RMN forma parte de un circuito eléctrico, que en su forma más simple puede ser descrito por un circuito tipo RLC serie.

- Encuentre una expresión para la impedancia compleja de un circuito RLC serie, recuerde que $Z_L = i\omega L$, $Z_R = R$ y $Z_C = -i/(\omega C)$. Donde i es la unidad imaginaria.

Se dice que un circuito RLC está en resonancia cuando la frecuencia de trabajo es tal que la parte imaginaria de Z es cero.

- Asumiendo que para nuestro circuito es: $C = 10$ pF ($p = \text{pico} = 1 \times 10^{-12}$), $R = 50$ ohm y la frecuencia de trabajo $\omega = 64.2 \times 2\pi$ MHz (MHz = 1×10^6 Hz) encuentre el valor de L .

La relajación

En RMN existen parámetros físicos que cuantifican el retorno al equilibrio de la magnetización M generada por los núcleos. Uno de ellos es la constante de relajación T_2 . Esta constante es utilizada para diferenciar entre tejido biológico sano y tejido biológico enfermo. Para obtener el valor de esta constante se hacen experimentos donde se observa el decaimiento temporal de la magnetización. En esos experimentos la dependencia temporal de la magnetización es como lo indica la ecuación 7.

$$M(t) = M_0 \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \quad (\text{ec.7})$$

En las gráficas siguientes se muestran dos mediciones experimentales de esos decaimientos. Los valores son reproducidos en la Tabla 1.

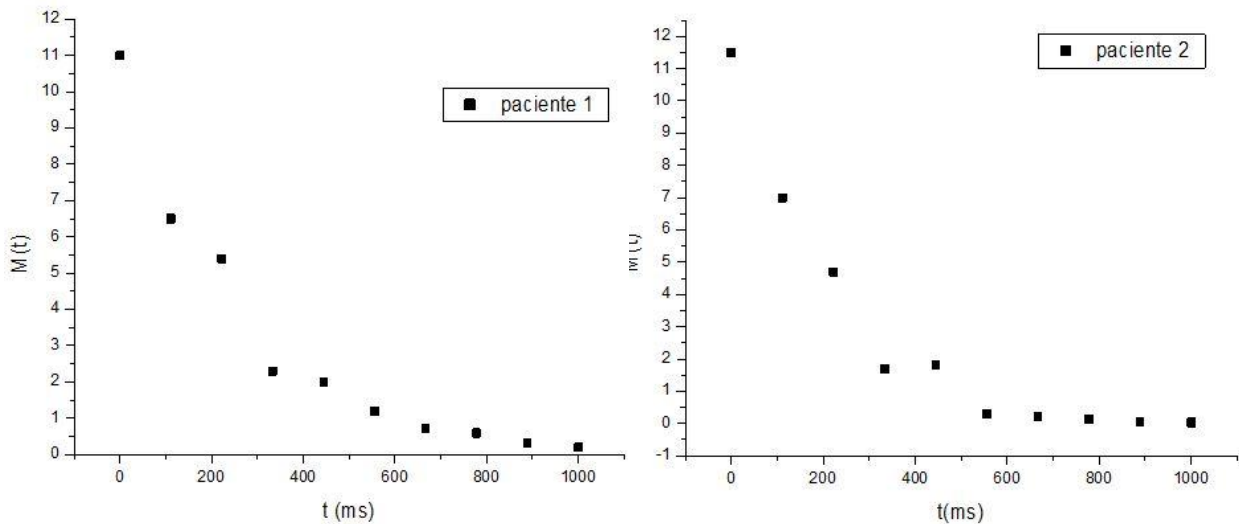


Tabla 1: Experimentos de relajación T_2 de la magnetización

	Paciente 1	Paciente 2
tiempo (ms)	Intensidad de magnetización (10^{-9} T)	Intensidad de magnetización (10^{-9} T)
0,0	11 ± 1	12 ± 1
111,1	$6,5 \pm 0,6$	$7,0 \pm 0,7$
222,2	$5,4 \pm 0,5$	$4,7 \pm 0,5$
333,3	$2,3 \pm 0,5$	$1,7 \pm 0,3$
444,4	$2,0 \pm 0,4$	$0,3 \pm 0,5$
555,6	$1,2 \pm 0,2$	$0,3 \pm 0,5$
666,7	$0,7 \pm 0,3$	$0,21 \pm 0,08$
777,7	$0,6 \pm 0,2$	$0,13 \pm 0,05$
888,8	$0,3 \pm 0,1$	$0,05 \pm 0,02$
1000,0	$0,20 \pm 0,08$	$0,03 \pm 0,01$

- e) Obtenga a partir de los datos experimentales los valores de T_2 para ambos tipo de tejidos. Recuerde que el tiempo t' para el cual la magnetización ha decaído a un 37% de su valor inicial es $t' = T_2$.
- f) Sabiendo que T_2 para tejido sano es $T_2 > 220$ ms y para tejido enfermo es $T_2 < 220$ ms, indique cuál de las curvas corresponde al tejido sano y cual al tejido enfermo.

**Instancia Nacional
Prueba Experimental
Nivel 1**

Péndulo de Torsión.

Introducción.

Un péndulo de torsión consiste de un cuerpo suspendido de un alambre o de un resorte. Cuando se hace girar el cuerpo, alrededor del eje del alambre, experimentará un torque que tiende hacerlo volver a la posición de equilibrio. Si se deja libre al cuerpo este comenzará a oscilar alrededor de la posición de equilibrio. Para pequeñas amplitudes el periodo del péndulo de torsión es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} \quad (1)$$

Donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación y K es la constante de torsión del alambre o resorte.

Si el cuerpo es como el de la figura, constituido por un cilindro vertical, el cual es atravesado por una varilla roscada, y dos masas puntuales (M) el momento de inercia será:

$$I = I_a + 2 M d^2 \quad (2)$$

Donde I_a es el momento de inercia del cilindro atravesado por la varilla roscada y Md^2 es el momento de inercia de cada una de las masas cilíndricas de bronce que se encuentran a una distancia d del eje de rotación.

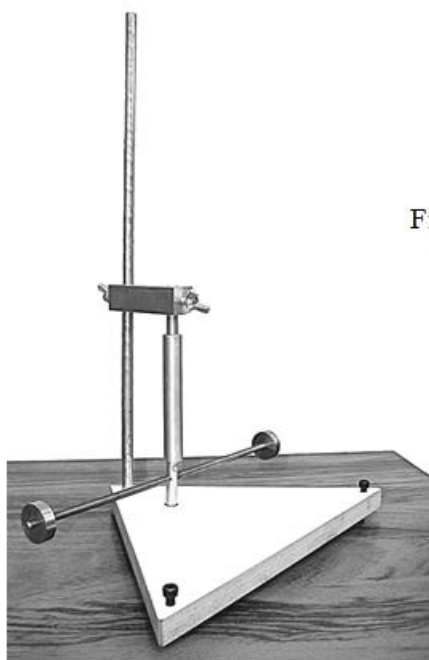
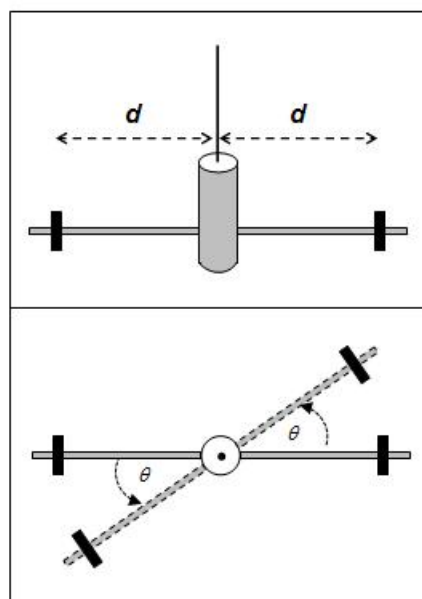


Figura 1



Objetivo.

Determinar experimentalmente la relación entre T^2 y d^2 para un péndulo de torsión.

Elementos disponibles.

- Péndulo de torsión
- 2 masas de bronce de ---- g
- Cronómetro
- Regla
- Papel milimetrado

Procedimiento.

1. Nivele la base con los tornillos para que el cilindro de aluminio no toque las paredes del hueco en la base de madera.
2. Mida el periodo del péndulo sin masas.
3. Coloque las masas en la varilla roscada como se muestra en la Figura 1.
4. Mida la distancia d y el período de oscilación.
5. Repita el punto 4 para distintos valores de d .

Consignas.

1. Construya una tabla con todos los valores medidos.
2. Construya una tabla con los valores de d^2 y T^2 .
3. Grafique T^2 en función de d^2 .
4. Indique el tipo de relación que existe entre estas dos variables.

Datos útiles.

Incertidumbre asociada a la función x^2 :

$$\Delta(x^2) = 2x \Delta x$$

**Instancia Nacional
Prueba Teórica
Nivel 2**

Problema 1

Globo meteorológico.

Aunque parezca simple programar el lanzamiento de un globo meteorológico, comparado con el lanzamiento de un satélite, es necesario hacer una diagramación correcta pues es muy importante el equipamiento que lleva suspendido como la información que se desea obtener. Debido a que resolver el problema real es complejo, te desafío a que hagamos algunos cálculos preliminares, lo cual implicará realizar algunas aproximaciones para simplificar los cálculos, que nos permitan estimar el comportamiento del globo meteorológico. Un globo meteorológico, usualmente construido de látex y lleno con hidrógeno (H_2) por su bajo costo, se utiliza para elevar equipamiento que permite medir distintos parámetros de interés meteorológico en función de la altura (presión, temperatura, humedad relativa, velocidad y dirección del viento, concentración de ozono, etc.). Debido a que la presión atmosférica disminuye con la altura el globo aumenta su volumen hasta que se rompe, lo que determina la altura máxima que alcanzará. Puede llegar aproximadamente a una altura de 30000 m y en algunos casos alcanzar alturas del orden de 50000 m



Para los cálculos vamos a suponer que el globo que utilizaremos tiene forma esférica y que el gas en su interior (H_2) se comporta como un gas ideal, el cual está sometido a la presión atmosférica y a la presión que le ejerce el globo. La presión que ejerce el globo sobre el gas depende del radio r que tiene el globo y puede aproximarse por

$$P(r) = K \left[\frac{r_0}{r} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^7 \right]$$

donde K es una constante que depende del globo y r_0 es su radio interno cuando no está inflado.

Los datos que disponemos para realizar los cálculos son:

Presión atmosférica: 97000 Pa	Temperatura ambiente: $17\text{ }^\circ\text{C}$
$K = 80000\text{ N/m}^2$	$r_0 = 10\text{ cm}$
Densidad del latex : $0,96\text{ g/cm}^3$	Espesor de la pared del globo desinflado: $1,5\text{ mm}$
Densidad del aire: 1.29 kg/m^3	Masa molar del H_2 : 2 g/mol
Masa del equipamiento suspendido: 440 g	

- Calcule cuántos moles de H_2 contiene el globo cuando se lo infla hasta un diámetro interno de 1 m .
- Determine el peso total del globo inflado
- Calcule el empuje que se ejerce sobre el globo en el momento de lanzarlo.
- Calcule cuál es la fuerza neta aplicada sobre el globo meteorológico (incluido el equipamiento) al momento de lanzarlo.
- Determine la aceleración del globo al momento de lanzarlo.

Sabemos que cuando el globo asciende el aire le ejerce un rozamiento (fuerza viscosa) cuyo módulo para una esfera es $F_v = 6\pi R \eta v$, donde R es el radio de la esfera, η es la viscosidad del aire y v es la velocidad del globo.

- Calcule cuál es la velocidad límite que alcanzaría el globo en su ascenso (sólo teniendo en cuenta los parámetros al momento del lanzamiento)

Si el mínimo espesor de la pared del globo para que el globo no se rompa es 0,02 mm.

- g) Calcule cuál es el radio del globo justo antes de explotar.
- h) Suponiendo que el gas en su ascenso ha sufrido una expansión adiabática, determine cuál sería la temperatura del gas en el interior del globo justo antes de explotar.
- i) Si el instrumental indica que la temperatura externa es de -60 °C ¿es válida la suposición del punto anterior?
- j) Suponiendo que la temperatura del gas en el interior del globo justo antes de explotar es igual a la externa, determine la presión del gas en el interior del globo.

Sabiendo que la presión atmosférica varía con la altura de acuerdo a la expresión

$$P_{at}(h) = P_o e^{-\alpha h}$$

donde P_o es la presión atmosférica a nivel del piso y $\alpha = 0,116 \text{ Km}^{-1}$

- k) calcule la máxima altura que alcanza el globo antes de estallar.

Constantes que le pueden ser de utilidad:

$$R = 8.31 \text{ J/(mol K)} \quad \eta = 1,71 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s} \quad g = 10 \text{ m/s}^2 \quad \gamma = c_p/c_v = 7/5$$

Problema 2

Diseño de un vehículo eléctrico.

En los últimos años ha habido un gran auge en la fabricación de automóviles eléctricos. Casi todas las marcas más importantes tienen modelos ya a la venta o modelos diseñados para el futuro. Las prestaciones de algunos de ellos son extraordinarias. Sin embargo la historia del automóvil eléctrico para nada es una historia que comenzó en los últimos años. Por el contrario en las dos primeras décadas del siglo XX hubo una proliferación de modelos de automóviles eléctricos, llegando en muchos casos a avances notables. El objetivo del presente problema es estudiar, desde el punto de vista de la física, algunas cuestiones mecánicas y eléctricas en el diseño de un automóvil eléctrico antiguo.

Las características generales del vehículo son:

- i) Motor eléctrico de CC, 24 Volts y 1HP de potencia. La máxima velocidad de giro del eje del motor es 1750 RPM (revoluciones por minuto).
- ii) La masa del vehículo es de 400 kg.
- iii) El vehículo posee una transmisión a cadena, formada por un piñón de 6cm de diámetro, montado sobre el eje del motor, y una corona de 24 cm, montada sobre el eje trasero del vehículo. El esquema de la transmisión se muestra en la figura 1. La foto de la figura 2 muestra esta transmisión para el caso de un vehículo Baker de 1907. La corona está montada de forma tal que tracciona sobre los dos semiejes traseros, y por lo tanto sobre las dos ruedas traseras.
- iv) La distancia entre los ejes del vehículo es $L = 175\text{cm}$ y la posición del centro de masa está dada por las coordenadas $x_1 = 75\text{cm}$ y $h = 85\text{cm}$ (ver figura 3).
- v) El vehículo tiene tres velocidades hacia adelante, controladas a través de resistencias – como se muestra en el diagrama de la figura 4 – y marcha atrás. Con el uso de esas resistencias, y de acuerdo a la posición de las llaves L1, L2 y L3, se logra que las **velocidades de giro del eje del motor** sean: 1ª marcha --- 1/3 de la velocidad máxima de giro del eje del motor; 2ª marcha --- 2/3 de la velocidad máxima de giro del eje; 3ª marcha --- velocidad máxima de giro del eje, es decir 1750 RPM.
- vi) Las ruedas de este vehículo son de 75cm de diámetro y de masa $m = 35 \text{ kg}$ cada una. Considérelas como un cilindro macizo.

I.- Diseño Mecánico

- Calcule la fuerza que ejerce el pavimento sobre cada una de las ruedas delanteras (F_{z1}) y sobre cada una de las ruedas traseras (F_{z2}), cuando el vehículo está en reposo. Suponga que el peso del vehículo se distribuye de tal forma que las fuerzas sobre las ruedas traseras son iguales entre sí, y las fuerzas sobre las ruedas delanteras son iguales entre sí. Ver figura 3.
- Encuentre expresiones para estas fuerzas, F_{z1} y F_{z2} , cuando el vehículo tiene una aceleración a_x , a lo largo del eje x. Para este cálculo tenga presente que el vehículo es de tracción trasera.
- Calcule la aceleración máxima posible para este vehículo, sin que las ruedas traseras comiencen a patinar. Suponga que el coeficiente de fricción entre los neumáticos y el pavimento es $\mu=1$.
- Teniendo en cuenta los datos provistos en las características del vehículo, calcule el torque capaz de entregar el motor. Aquí tenga presente que 1HP corresponde a 0.764 Kilowatts.
- Calcule el torque que la corona transmite a las ruedas traseras.
- Calcule la aceleración máxima que pueden proveer el motor y la transmisión instalados en el vehículo.
- Compare esta aceleración con la obtenida en el punto c) y en base a este resultado, diga si el vehículo ha sido diseñado correctamente o no.

Datos a tener en cuenta:

- El momento de inercia, de un cilindro macizo de radio b y masa m , a lo largo del eje del cilindro es:

$$I = \frac{1}{2}mb^2$$

- En el punto f) desprecie el momento de inercia del eje que une las ruedas traseras.
- Suponga que sobre ninguna parte mecánica móvil del vehículo hay rozamiento.

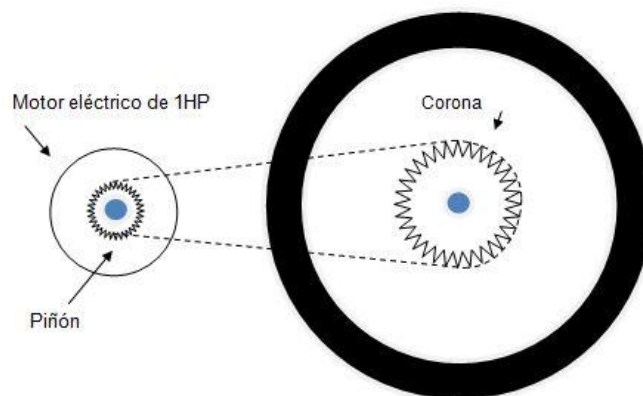


Figura 1: Esquema de la transmisión a cadena



Figura 2: Foto de la transmisión a cadena de un vehículo eléctrico Baker 1907

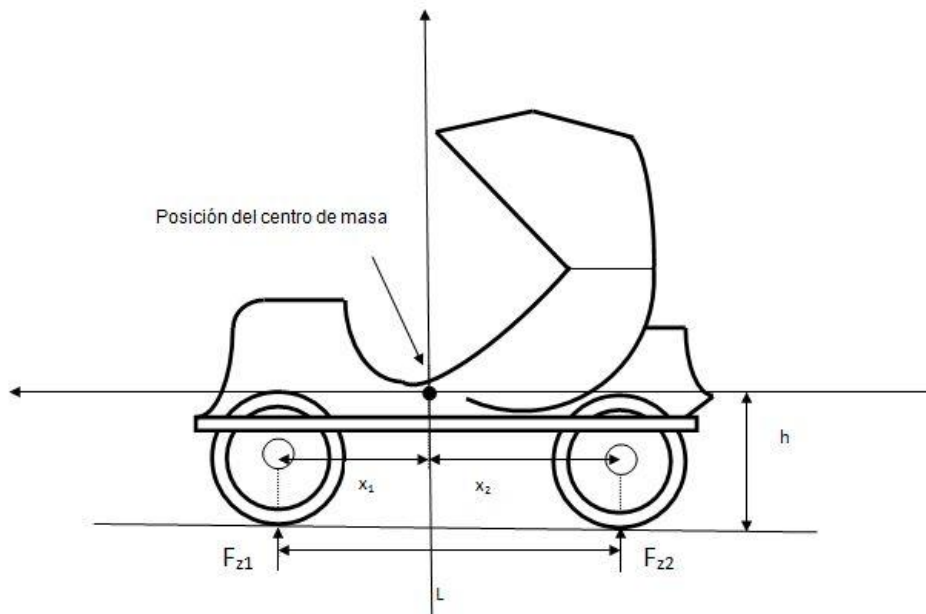


Figura 3: Esquema del vehículo eléctrico antiguo

II.- Diseño eléctrico.

- Calcule la máxima intensidad de corriente que debe proveer la batería del vehículo.
- La figura 4 muestra el diagrama eléctrico de la caja de comando de nuestro auto eléctrico. Calcule los valores de las resistencias R_1 y R_2 para lograr las velocidades indicadas en las características generales del vehículo, Suponga que las revoluciones del motor es directamente proporcional a la corriente eléctrica que por él circula.

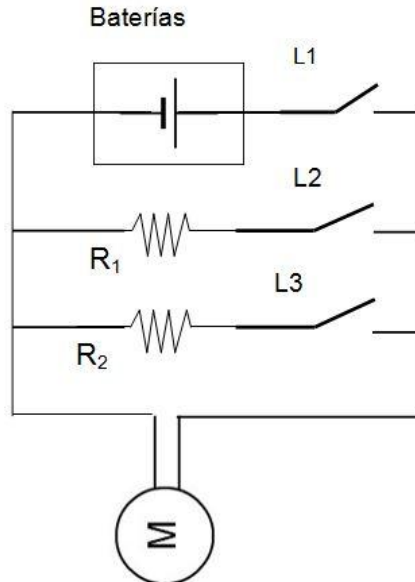


Figura 4. Esquema de conexiones de la caja de control del vehículo eléctrico

Problema 3

Hagamos bailar a los imanes de los núcleos.

Los núcleos de los átomos poseen una propiedad física cuántica, sin análogo clásico, denominada espín nuclear. Una particularidad del espín nuclear es que, ante la presencia de un campo magnético estático y homogéneo $\vec{B}_0$, se comportan como si fueran pequeños imanes con un momento magnético $\vec{\mu} = \gamma \hbar \vec{I}$, donde $\vec{I}$ es el “vector

cuántico" momento angular del espín nuclear, γ la constante geomagnética del núcleo y $\hbar$ la constante de Planck dividido 2π . Al valor del espín nuclear se lo denota por la letra I y se llama número cuántico de espín. Excepto por el hecho que la proyección de $\vec{I}$ en la dirección del campo magnético externo, ver Figura 1, adopta solo ciertos valores discretos (cuantificación) el comportamiento del momento magnético de los espines se puede modelar por las reglas del electromagnetismo clásico.

Vamos a tratar con núcleos de Hidrógeno (protones), que son muy abundantes en el cuerpo humano. Para estos núcleos $I = 1/2$.

La proyección de $\vec{I}$ sobre el eje z , toma para el caso del protón, dos valores $m=+1/2$ y $m=-1/2$.

Esto quiere decir que tendremos algunos espines con su proyección sobre la dirección del eje z apuntado paralelos al campo externo y otros apuntado antiparalelos al campo externo. Por cuestiones energéticas tendremos mas espines apuntando paralelos al campo $\vec{B}_0$ que antiparalelos al campo $\vec{B}_0$. Esto dará origen a una magnetización neta en la dirección de $\vec{B}_0$, ver Figura 1.

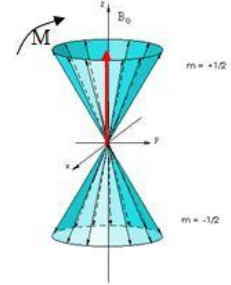


Figura 1

La magnetización total que surge de los espines nucleares de la muestra, es una cantidad vectorial y está dada por

$$\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i \quad (\text{ec. 1})$$

donde $\vec{\mu}_i$ es el momento magnético del núcleo i .

Usando que $\vec{\mu}_i = \gamma \hbar \vec{I}_i$, la magnetización de la muestra se puede escribir como

$$\vec{M} = \gamma \hbar \vec{J} \quad (\text{ec. 2})$$

donde $\vec{J} = \sum_i \vec{I}_i$ es el momento angular total de espín de la muestra. Si la muestra se coloca en presencia de un campo magnético $\vec{B}_0$ uniforme, como es el caso de un experimento de Resonancia Magnética Nuclear (RMN), se ejerce un torque $\vec{T}_M$ sobre el vector magnetización donde el torque está dado por

$$\vec{T}_M = \vec{M} \times \vec{B}_0 \quad (\text{ec.3})$$

Se puede mostrar que la magnetización precesa (movimiento de trompo) alrededor del campo magnético a una frecuencia angular constante de módulo

$$\omega = \gamma B_0 \quad (\text{ec.4})$$

(ver Figura 2).

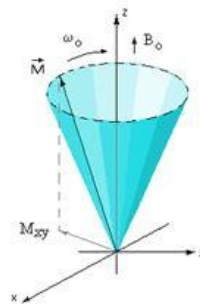


Figura 2

La expresión de la magnetización inducida por los espines nucleares de protones a temperatura ambiente (T_a) es

$$M = \frac{\mu_0 \gamma^2 \hbar^2 n}{4 k_B T_a} B_0 = 4.04 \times 10^{-9} B_0 \quad (\text{ec.5})$$

Donde n es el número de espines nucleares de protones por unidad de volumen, μ_0 la permeabilidad magnética del vacío, k_B la constante de Boltzmann y T_a la temperatura ambiente en K. La unidad de M es el Tesla ($1 \text{ Tesla} = 1 \text{ V.s/m}^2$).

En un experimento de RMN se usa sacar del equilibrio la magnetización M mediante la aplicación de un campo magnético alterno $\vec{B}_1$ perpendicular al campo externo $\vec{B}_0$. Este

campo $\vec{B}_1$ se aplica durante unos pocos microsegundos. La situación luego de aplicar este campo $\vec{B}_1$ es la que se muestra en la Figura 3. Entonces la magnetización $\vec{M}$ girará alrededor del campo $\vec{B}_0$ en el plano xy.

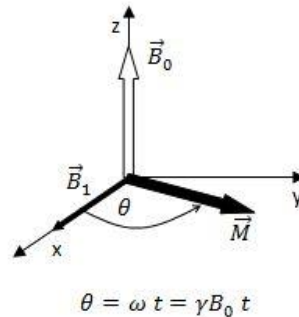


Figura 3

Para detectar la señal generada por los núcleos en un experimento de RMN se coloca una bobina, digamos a lo largo del eje x, de modo que esta detecte la variación de flujo de campo magnético a través de ella, generada por la magnetización rotante $\vec{M}$ en el plano xy. En nuestro caso particular la magnitud de la magnetización a lo largo del eje de la bobina tendrá una dependencia temporal dada por la ecuación 6

$$M(t) = M_0 \sin(\omega t) \quad (\text{ec.6})$$

con $\omega = 64.2 \times 2\pi$ MHz (MHz = 1×10^6 Hz).

Para simplificar los cálculos supondremos que $M(t)$ varía linealmente con el tiempo, es decir aproximamos la función seno por una función diente de sierra, ver Figura 4.

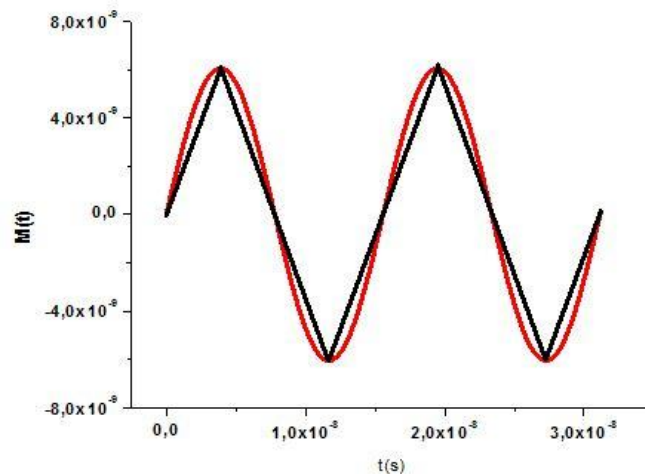


Figura 4

Asumiendo que la relación entre campo magnético y magnetización está dado por

$$B_M = M \quad (\text{ec.7})$$

y el valor máximo de M a lo largo de la bobina es $M = 6.06 \times 10^{-9}$ T (1 Tesla = 1 V.s/m^2).

- A partir de la ecuación 5 encuentre el valor de B_0 .
- Determine el periodo de $M(t)$ (ecuación 6).
- Calcule la fuerza electromotriz inducida (fem), debido a la variación temporal de M a lo largo del eje de la bobina. Considere una bobina de forma cilíndrica de 4 vueltas y 0.01 m de diámetro. Calcule la fem durante $\frac{1}{4}$ del período inicial mostrado en la Figura 4.

Recuerde que la fuerza electromotriz inducida, en una espira de área A, es el cociente, con signo menos, entre el cambio del flujo de campo magnético sobre el área de la espira, y el intervalo de tiempo en que ese cambio ocurre.

El circuito resonante

La bobina utilizada en un experimento de RMN forma parte de un circuito eléctrico, que en su forma más simple puede ser descrito por un circuito tipo RLC serie.

- d) Encuentre una expresión para la impedancia compleja de un circuito RLC serie, recuerde que $Z_L=i\omega L$ $Z_R = R$ y $Z_C = -i/(\omega C)$. Donde i es la unidad imaginaria.

Se dice que un circuito RLC está en resonancia cuando la frecuencia de trabajo es tal que la parte imaginaria de Z es cero.

- e) Asumiendo que para nuestro circuito es: $C = 10\text{ pF}$ ($p = \text{pico} = 1 \times 10^{-12}$), $R = 50\text{ ohm}$ y la frecuencia de trabajo $\omega = 64.2 \times 2\pi\text{ MHz}$ ($\text{MHz} = 1 \times 10^6\text{ Hz}$) encuentre el valor de L.

La relajación

En RMN existen parámetros físicos que cuantifican el retorno al equilibrio de la magnetización M generada por los núcleos. Uno de ellos es la constante de relajación T_2 . Esta constante es utilizada para diferenciar entre tejido biológico sano y tejido biológico enfermo. Para obtener el valor de esta constante se hacen experimentos donde se observa el decaimiento temporal de la magnetización. En esos experimentos la dependencia temporal de la magnetización es como lo indica la ecuación 7.

$$M(t) = M_0 \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \qquad \text{(ec.7)}$$

En las gráficas siguientes se muestran dos mediciones experimentales de esos decaimientos. Los valores son reproducidos en la Tabla 1.

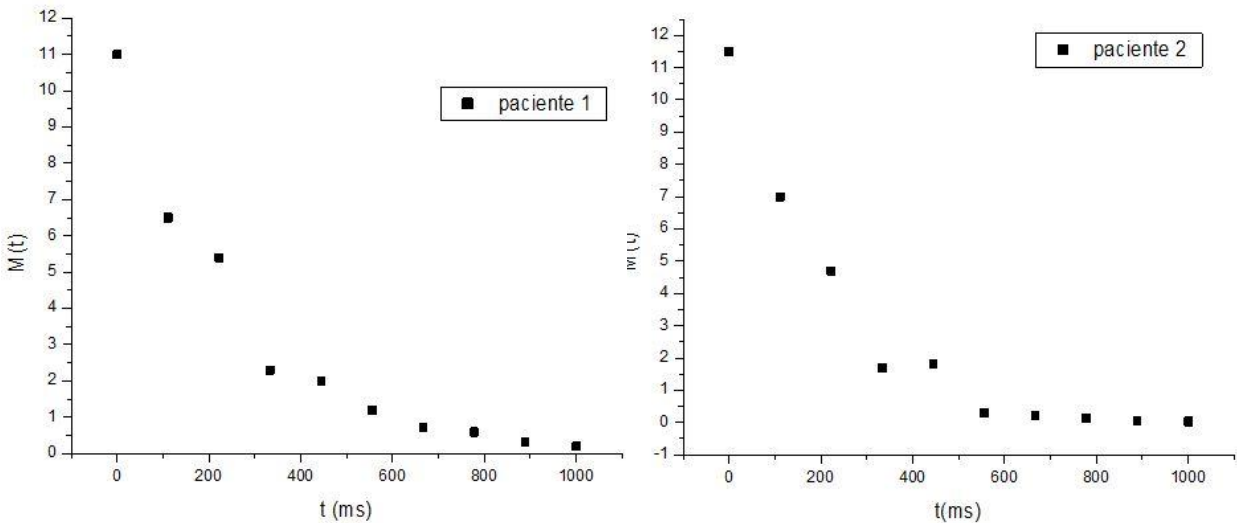


Tabla 1: Experimentos de relajación T_2 de la magnetización

	Paciente 1	Paciente 2
tiempo (ms)	Intensidad de magnetización (10^{-9} T)	Intensidad de magnetización (10^{-9} T)
0,0	11±1	12±1
111,1	6,5±0,6	7,0±0,7
222,2	5,4±0,5	4,7±0,5
333,3	2,3±0,5	1,7±0,3
444,4	2,0±0,4	0,3±0,5
555,6	1,2±0,2	0,3±0,5

666,7	$0,7 \pm 0,3$	$0,21 \pm 0,08$
777,7	$0,6 \pm 0,2$	$0,13 \pm 0,05$
888,8	$0,3 \pm 0,1$	$0,05 \pm 0,02$
1000,0	$0,20 \pm 0,08$	$0,03 \pm 0,01$

- f) Obtenga a partir de los datos experimentales los valores de T_2 para ambos tipo de tejidos.
- g) Estime una incerteza para T_2 en ambos casos. Exprese los valores de T_2 con sus respectivas incertezas. Recuerde que $\Delta(\ln(M)) = \Delta M/M$.
- h) Sabiendo que T_2 para tejido sano es $T_2 > 220$ ms y para tejido enfermo es $T_2 < 220$ ms, indique cuál de las curvas corresponde al tejido sano y cual al tejido enfermo.

Sugerencia: Obtenga el valor de T_2 linealizando los datos de la Tabla 1 y encontrando en forma gráfica la recta que mejor represente a los datos experimentales.

Alternativamente: El tiempo t' para el cual la magnetización ha decaído a un 37% de su valor inicial es $t' = T_2$.

**Instancia Nacional
Prueba Experimental
Nivel 2**

Péndulo de Torsión.

Introducción.

Un péndulo de torsión consiste de un cuerpo suspendido de un alambre o de un resorte. Cuando se hace girar el cuerpo, alrededor del eje del alambre, experimentará un torque que tiende hacerlo volver a la posición de equilibrio. Si se deja libre al cuerpo este comenzará a oscilar alrededor de la posición de equilibrio. Para pequeñas amplitudes el periodo del péndulo de torsión es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \quad (1)$$

Donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación y K es la constante de torsión del alambre o resorte.

Si el cuerpo es como el de la figura, constituido por un cilindro vertical, el cual es atravesado por una varilla roscada, y dos masas puntuales (M) el momento de inercia será:

$$I = I_a + 2M d^2 \quad (2)$$

Donde I_a es el momento de inercia del cilindro atravesado por la varilla roscada y Md^2 es el momento de inercia de cada una de las masas cilíndricas de bronce que se encuentran a una distancia d del eje de rotación.

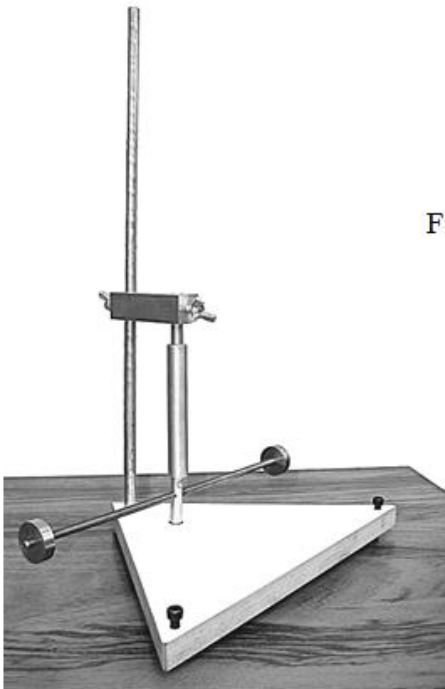
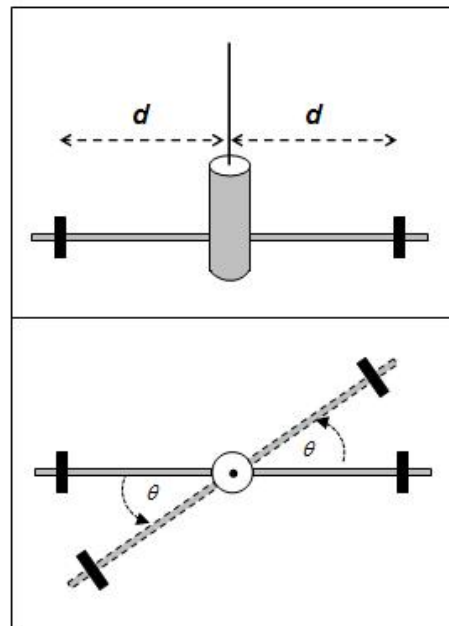


Figura 1



Objetivo.

Determinar experimentalmente el momento de inercia I_a y la constante de torsión K .

Elementos disponibles

- Péndulo de torsión
- 2 masas de bronce de ---- g
- Cronómetro
- Regla
- Papel milimetrado

Procedimiento

1. Nivele la base con los tornillos para que el cilindro de aluminio no toque las paredes del hueco en la base de madera.
2. Mida el periodo del péndulo sin masas.
3. Coloque las masas en la varilla roscada como se muestra en la Figura 1.
4. Mida la distancia d y el período de oscilación.
5. Repita el punto 4 para distintos valores de d .

Consignas

1. Construya una tabla con todos los valores medidos.
2. Grafique estos datos experimentales de tal manera de obtener una relación lineal. Use para ello la expresión (1).
3. A partir del gráfico determine el valor de la pendiente y de la ordenada al origen con sus correspondientes incertidumbres.
4. Determine el valor de la constante elástica de torsión K con su correspondiente incertidumbre.
5. Determine el valor del momento de inercia I_a con su correspondiente incertidumbre.