Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 1 (2014)

Problema 1: Escribir los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ y dibujarlos.

a) $(2-3i)(2+3i)$

b) $\dfrac{(3+i)}{3-4i} - \dfrac{(2-i)}{8i}$

c) $\dfrac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

d) $(1-i)^4$

Problema 2: En cada caso determinar $\overline{z}$, $\mathrm{Re}(\,z)$, $\mathrm{Im}(\,z)$ y $|z|$.

a) $z = 4i - 3$

b) $z = -2i$

c) $z = (4i)^2$

d) $z = \dfrac{-1+3i}{2-i}$

Problema 3: En cada caso hallar $\arg(z)$ y $\mathrm{Arg}(z)$

$$a)\ z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}, \qquad b)\ z = \frac{i}{-2-2i}, \qquad c)\ z = (\sqrt{3}-i)^6.$$

Problema 4: Probar que

a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

c) $\Big| |z_1| - |z_2| \Big| \leq |z_1 - z_2|$

d) Si $|z_2| \neq |z_3|$, $\left| \dfrac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \dfrac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$

Problema 5: Graficar en el plano los conjuntos donde z satisface:

a) $|z| = 1$

b) $\mathrm{Im}\,(z) = 0$

c) $|3z + 2| < 1$

d) $0 < \arg z \leq \pi$

e) $\{\mathrm{Im}\,(z) \geq 2\} \cup \{\mathrm{Re}\,(z^2) > 0\}$

f) $\mathrm{Im}\,(z + 1/z) = 0$

Problema 6: Usar la forma polar para simplificar las siguientes expresiones. Hallar en cada caso el módulo y el argumento principal del resultado.

a) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

b) $\dfrac{3}{(\sqrt{3}-i)^2}$

c) $(1+i)^3$

d) $i^5 \cdot i^3$

Problema 7:

a) Probar la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Ayuda: Tomar $s = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y calcular $(1-z)s$.

b) Mostrar que si c es una raíz n-ésima de la unidad, $c \neq 1$, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$$

Problema 8: Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones y dibujarlas.

a) $z^5 - 32 = 0$

b) $z^2 - 2i = 0$

c) $z^3 + 1 = 0$

Problema 9: Hallar las raíces de la ecuación $z^4+4=0$ y usarlas para factorizar z^4+4 en producto de polinomios de grado dos con coeficientes reales.
Problema 10: Representar gráficamente los siguientes conjuntos y determinar cuáles son abiertos y conexos (y por tanto, dominios), cuáles son acotados, y cuáles no son abiertos ni cerrados.

a) $|z-(2+i)| \leq 1$

b) $\operatorname{Im} z = 3$

c) $|2z+5| > 2$

d) $|z-4| \geq |z|$

e) $0 < \arg z < \pi/4 \quad (z \neq 0)$

f) $\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2 \quad (z \neq 0)$

Problema 11: Probar que la hipérbola $x^2-y^2=1$ puede ser escrita en la forma $z^2+\overline{z}^2=2$.
Problema 12: Usando el hecho de que $|z_1-z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, decir qué curvas describen los siguientes conjuntos:

a) $|z-4i|+|z+4i| = 10$

b) $|z-1| = |z+i|$.

Problema 13: Probar la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1+\cos\alpha+\cos(2\alpha)+\cdots+\cos(n\alpha) = \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left((n+\frac{1}{2})\alpha\right)}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}$$