Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – Análisis Matemático IV

Guía N° 2 (2014)

Problema 1: Describir el dominio de definición de las siguientes funciones y dibujarlo:
(a) $f(z) = \dfrac{\overline{z} - 1}{z^2 + i}$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$ (c) $f(z) = \dfrac{z}{z + \overline{z}}$

Problema 2: Probar que si $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ entonces $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$

Problema 3: Expresar las siguientes funciones en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:
(a) $f(z) = z^3 + z - 1$ (b) $f(z) = \dfrac{\overline{z} - 1}{z^2 + 1}$

Problema 4: Hallar los siguientes límites:
(a) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z + i}$ (b) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{4z^2}{(z - 1)^2}$
(c) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^2 + 1}{z + 1}$ (d) $\lim\limits_{z \to 1 - i} (z + 2i\mathrm{Re}(z))$

Problema 5: Para cada una de las siguientes funciones complejas, usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar si existe f'. Si existe la derivada, calcularla:

$$
\begin{array}{cccc}
(a) & f(z) = \overline{z} & (b) & f(z) = \overline{z}^2 \\
(c) & f(z) = \mathrm{I}m(z) & (d) & f(z) = |z|^2 \\
(e) & f(z) = iz + 2 & (f) & f(z) = \cos x \, \cosh y + i \,\mathrm{sen}\, x \, \mathrm{senh}\, y \\
(g) & f(z) = e^{-x} e^{-iy} & (h) & f(z) = \cos x \, \cosh y - i \,\mathrm{sen}\, x \, \mathrm{senh}\, y \\
(i) & f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i \dfrac{y}{x^2 + y^2} & &
\end{array}
$$

Problema 6: Sea f una función analítica en un dominio D abierto y simplemente conexo. Probar que:

a) Si $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$ entonces f es constante.

b) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

c) Si $\mathrm{R}e(f(z)) = 0$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

Problema 7: Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ funciones de valores reales cuyas derivadas parciales de primer orden existen en un entorno ε de un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ y son contínuas en dicho punto.

a) Usando la transformación de coordenadas Cartesianas a polares y la regla de la cadena muestre que:

$$u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \,\mathrm{sen}(\theta), \qquad u_\theta = -u_x r \,\mathrm{sen}(\theta) + u_y r \cos(\theta).$$

b) Muestre que si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas) en (x, y) entonces satisfacen las ecuaciones

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad \frac{1}{r} u_\theta = -v_r. \tag{1}$$

c) Recíprocamente, resuelva las ecuaciones del item (a) y sus similares para v despejando u_x, u_y, v_x y v_y en función de u_r, u_θ, v_r y v_θ y muestre que si las ecuaciones (1) se satisfacen entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas).

Problema 8: Probar que las siguientes funciones $u(x, y)$ son armónicas y hallar una conjugada armónica $v(x, y)$:

(a) $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ (b) $u(x, y) = 2x(1 - y)$ (c) $u(x, y) = \cosh x \cos y$

Problema 9: Probar que las curvas de nivel de una función armónica y las curvas de nivel de su conjugada armónica son perpendiculares en todo pundo donde sus gradientes no se anulan. Grafique cualiltativamente las curvas de nivel de las partes reales e imaginaria de $f(z) = z^2$.

Problema 10: Probar que $e^z = e^{x+iy}$ es analítica en todo el plano complejo. Probar además las siguientes igualdades:
(a) $\exp(\frac{2+\pi i}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1 + i)$ (b) $\exp(z + \pi i) = -\exp z$ (c) $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$

Problema 11: Muestre que $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

Problema 12: Pruebe que

a) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$, y $\cos(-z) = \cos(z)$.

b) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

c) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) + \operatorname{sen}(z_2)\cos(z_1)$.

d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z - 2) - \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$.

e) Tanto $\operatorname{sen}(z)$ como $\cos(z)$ son periódicas con período real 2π.

Problema 13: Encuentre todas las raíces de $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$.

Problema 14: Pruebe que:

a) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$ y $\cosh(-z) = \cosh(z)$.

b) $\cosh(z) - \operatorname{senh}(z) = 1$.

c) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh}(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\operatorname{senh}(z_2)$.

d) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \operatorname{senh}(z_1)\operatorname{senh}(z_2)$.

e) $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$.

f) $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$.

g) $|\operatorname{senh}(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$.

h) $|\cosh(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \cos^2(y)$.

Problema 15: Muestre que

a) $\log(i^{1/2})$ y $(1/2)\log(i)$ representan el mismo conjunto de valores.

b) $\log(i^2)$ y $2\log(i)$ NO representan el mismo conjunto de valores.

Problema 16: Muestre que para todos los puntos del semiplano complejo derecho ($z = x + iy$, $x > 0$) vale

$$\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Problema 17: Muestre que los valores de $z^{n/m}$ definidos algebraicamente al principio del curso coinciden con los valores de $\exp(n\log(z)/m)$.

Problema 18: Se define la inversa del $\operatorname{arc\,sen}(z)$ como todos los valores $w \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen}(w) = z$. Muestre que

$$\operatorname{arc\,sen}(z) = -i\log\Big(iz + (1 - z^2)^{1/2}\Big).$$

analogamente muestre que

$$\arccos(z) = -i\log\Big(z + i(1 - z^2)^{1/2}\Big).$$

Problema 19: Muestre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\operatorname{arc\,sen}(z) &= \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \\ \frac{d}{dz}\arccos(z) &= \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$