

Problema 1: Sea $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Pruebe que

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt.$$

Problema 2: Muestre que $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = - \int_{z_2}^{z_1} f(z) dz$ usando el mismo camino de integración pero en sentido inverso.

Problema 3: Muestre que la integral $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \bar{z} dz$ depende del camino recorrido. Elija para ello dos caminos distintos usando líneas rectas.

Problema 4: Encuentre las integrales curvilineas de $\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^z dz$ a lo largo de los caminos utilizados en el ejercicio anterior.

Problema 5: Use el Teorema de Cauchy-Goursat o la fórmula integral de Cauchy para calcular las siguientes integrales:

a) $\oint_C \frac{\text{sen}(z)}{2z - \pi} dz$, donde C es el círculo a) $|z| = 1$, b) $|z| = 2$.

b) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{2 \ln(2) - z} dz$, donde C es el círculo a) $|z| = 1$, b) $|z| = 2$

Problema 6: Muestre que $\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$, donde C es un contorno circular alrededor del punto z_0 , tomado en sentido antihorario, y n es un entero.

Problema 7: Calcule $\oint_C \frac{1}{z^2 - 1} dz$, donde C es el círculo $|z| = 2$.

Problema 8: Utilice la desigualdad ML para hallar cotas para los módulos de las siguientes integrales

a) La integral del ejercicio anterior.

b) $\oint_{|z|=R} \frac{\text{Log}(z)}{z^2} dz$, con $R > 1$.

Problema 9: Calcule las siguientes integrales (recuerde la fórmula extendida de Cauchy)

a) $\oint_C \frac{\text{sen}(2z)}{(6z - \pi)^3} dz$, donde C es el círculo $|z| = 3$.

b) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{(2 \ln(2) - z)^5} dz$, donde C es el círculo $|z| = 2$.

Problema 10: Calcule las series Taylor en los centros indicados y determine los radios de convergencia

$$a) f(z) = 1/z, z_0 = 1 + i. \quad b) f(z) = z^i, \text{ (rama principal), } z_0 = 1.$$

$$c) f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}, z_0 = 2.$$

Problema 11: Encontrar las singularidades de cada una de las siguientes funciones y clasificarlas según sean polos o singularidades esenciales. Calcule todos los desarrollos de Laurent de cada función centrados en cada singularidad.

$$a) f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2(z-\pi)}, \quad b) f(z) = z \exp\left(\frac{1}{z}\right), \quad c) f(z) = \frac{z^2}{1+z}.$$

Problema 12: Calcule los tres términos de orden más bajo, no nulos, de la serie de Laurent de $\operatorname{cosec}(z)$ centrada en $z = 0$ que converge: a) alrededor del origen, b) en el punto $z = \pi + i$.

Problema 13: Demostrar que las singularidades de las funciones siguientes son polos. Determinar su orden y los correspondientes residuos:

$$a) f(z) = \frac{1 - \cosh(z)}{z^3} \quad b) f(z) = \tanh(z) \quad c) f(z) = \frac{z}{\cos(z)}$$

Problema 14: Si C es el círculo unitario recorrido en sentido positivo, evaluar las siguientes integrales:

$$a) \int_C \frac{dz}{\operatorname{sen}(z)} \quad b) \int_C \frac{e^{1/z} dz}{z} \quad c) \int_C \frac{e^{-z}}{z(z+2)} dz$$

Problema 15: Calcular la integral $\int_C \frac{3z^2 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$, en los siguientes casos: i) C es el círculo $|z-2|=2$, ii) C es el círculo $|z|=4$, ambos recorridos en sentido antihorario.

Problema 16: Probar las siguientes identidades.

$$a) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad f) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a \cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad -1 < a < 1.$$

$$b) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4} \quad g) \int_0^\pi (\operatorname{sen}(\theta))^{2n} d\theta = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$c) \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad h) \int_0^\infty \frac{\log(x) dx}{1+x^2} = 0$$

$$d) \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6} \quad i) \int_0^\infty \frac{\log(x) dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$e) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4 \operatorname{sen}(\theta)} = \frac{2\pi}{3} \quad j) \int_0^\infty \frac{\cos(x) dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{(a^2-b^2)} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) \quad (a > b > 0)$$

Problema 17: Calcular la siguiente integral : $\int_0^\infty \frac{\cos(x) - 1}{x^2} dx$

Problema 18: Calcular las integrales

$$a) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad b) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4 - \pi^4}.$$