Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – Análisis Matemático IV

Guía N° 4 (2014)

**Problema 1:** Calcule la serie de Fourier de la función $f(x)$, con período $2\pi$, definida por $f(x) = x^2 \quad -\pi < x < \pi$.

**Problema 2:** Extienda a una función par, la función definida por $f(x) = \text{sen}(ax)$ si $0 < x < \pi$. Calcule su serie de Fourier.

**Problema 3:** Calcule la serie de Fourier (de senos y cosenos) de la función $f(x)$, con período $2\pi$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

**Problema 4:** Expandir la función del ejercicio anterior en su serie de Fourier con exponenciales complejas $e^{inx}$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Verifique (usando la fórmula de Euler) que el resultado es el mismo que en el ejercicio anterior.

**Problema 5:** Considere las funciones $\text{sen}(\frac{2\pi nx}{L})$ y $\cos(\frac{2\pi mx}{L})$ (verifique que son periódicas de período $L$)

*a)* Demuestre, por integración directa, las siguientes relaciones de ortogonalidad:

*1)* $\int_0^L \cos(\frac{2\pi nx}{L}) \,\text{sen}(\frac{2\pi mx}{L}) dx = 0$

*2)* $\int_0^L \cos(\frac{2\pi nx}{L}) \cos(\frac{2\pi mx}{L}) dx = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$

*3)* $\int_0^L \text{sen}(\frac{2\pi nx}{L}) \,\text{sen}(\frac{2\pi mx}{L}) dx = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$

*b)* Utilice las relaciones de ortogonalidad para encontrar la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una función $f(x)$ con período $L$. Es decir, encuentre $a_n$ y $b_n$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\right)$$

**Problema 6:** Cada una de las siguientes funciones se da a lo largo de un período. Grafique varios períodos de la función y calcule el desarrollo en serie de Fourier apropiado para cada caso:

*a)* $f(x) = x$ si $0 < x < 2$.

*b)* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \end{cases}$

**Problema 7:** A veces es útil aproximar $\text{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[0, 1]$ por una prábola. Calcule que la serie de Fourier de $f(x) = 4x(1 - x),\ 0 \leq x \leq 1$ extendida como función impar al intervalo $[-1, 1]$ y muestre que los coeficientes decaen com $1/n^3$.

**Problema 8:** Para cada una de las siguientes funciones periódicas, definidas en $[-\pi, \pi]$ calcular la serie de Fourier y estudiar su convergencia.

*a)* $f(x) = 1$

*b)* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

*c)* $f(x) = |x|$

*d)* $f(x) = x,\ -\pi < x < \pi,\ f(-\pi) = 0.$

**Problema 9:** Evaluando en un punto apropiado el desarrollo en serie de Fourier de la función 1-periódica $h(x) = -x$ si $x \in (-1/2, 0]$ y $h(x) = x$ si $x \in [0, 1/2)$, calcule el valor de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

**Problema 10:** La función zeta de Riemann se define sobre los complejos como $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Utilice el desarrollo hallado en el problema 1 para calcular el valor de $\zeta(2)$.

**Problema 11:** Sea $f(x) = x$ si $x \in (-\pi, \pi]$, $2\pi$-periódica. Desarrolle $f$ en serie de Fourier y utilize la relación de Parseval para recuperar el resultado del problema anterior.

**Problema 12:** Sea $f(x) = e^{sx}$, si $x \in (-\pi, \pi]$, $2\pi$-periódica.

*a)* Calcule la serie de Fourier de $f(x)$.

*b)* Use la serie hallada para probar que

$$\frac{\pi}{s} \coth(\pi s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2 + n^2}.$$