FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – Análisis Matemático IV

Guía N° 5 (2014)

**Notación:** Transformada de Fourier y fórmula de inversión

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}_{x\to\omega}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$
$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\omega\to x}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

**Problema 1:** Pruebe que

*a)* $\mathcal{F}_{x\to\omega}\{f(x)e^{-ihx}\} = \hat{f}(\omega + h)$.

*b)* $\mathcal{F}_{x\to\omega}\{-ixf(x)\} = \dfrac{d\hat{f}}{d\omega}$.

**Problema 2:** Pruebe que la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$, es otra Gaussiana, a saber $\hat{f}(\omega) = e^{-\omega^2/(4\alpha)}/\sqrt{2\alpha}$. Para esto muestre que

*a)* $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

*b)* $f'(x) = -2\alpha x f(x)$.

Usando $b$) muestre que $\hat{f}'(\omega) = -\dfrac{\omega}{2\alpha}\hat{f}(\omega)$. Finalmente integre esta ecuación diferencial y determine la constante de integración usando $a$).

**Problema 3:** Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

*a)* $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$. Ayuda: Usar el Teorema de los residuos.

*b)* $f(x) = xe^{-|x|}$.

**Problema 4:** Sean $f$ y $g$ funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las transformadas de Fourier $\hat{f}(\omega)$ y $\hat{g}(\omega)$.

**Problema 5:** Recordando que la convolución Fourier de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) g(t) dt,$$

pruebe que

*a)* $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

*b)* $\mathcal{F}_{x\to\omega}\{(f * g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

**Problema 6:** Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pruebe que la transformada de Fourier, $\hat{f}(\vec{k}) = \mathcal{F}_{\vec{x}\to\vec{k}}(f(\vec{x}))$, satisface (donde la flechita denota transformación de Fourier de $\vec{x} \to \vec{k}$.)

*a)* $f(\vec{x}+\vec{h}) \to e^{i\vec{k}\cdot\vec{h}}\hat{f}(\vec{k})$.

*b)* $f(\vec{x})e^{-i\vec{x}\cdot\vec{h}} \to \hat{f}(\vec{k}+\vec{h})$.

*c)* $f(\delta\vec{x}) \to \delta^{-d}\hat{f}(\delta^{-1}\vec{k})$

*d)* $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(\vec{x}) \to (ik)^{\alpha}\hat{f}(\vec{k})$, donde $\alpha$ es un multi índice.

*e)* $(-ix)^{\alpha} f(\vec{x}) \to \left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha}\hat{f}(\vec{k})$, donde $\alpha$ es un multi índice.

**Problema 7:** Una rotación en $\mathbb{R}^d$ es una transformación lineal que preserva el producto interno. Osea,

*a)* $R(ax+by) = aR(x)+bR(y)$,

*b)* $R(x)\cdot R(y) = x\cdot y,$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Pruebe que

$$f(R\vec{x}) \to \hat{f}(R\vec{k}).$$

Como corolario, pruebe que si $f(\vec{x})$ tiene simetría esférica (es decir, en coordenadas esféricas $f$ depende solo de $r$ y no de los ángulos), entonces su transformada de Fourier también.

**Problema 8:** Sean $(r,\theta,\phi)$ coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$. Calcule la transformada de Fourier de

$$f(\vec{x}) = \left(\frac{2}{\pi a^3}\right)^{3/4} e^{-r^2/a^2}.$$

**Problema 9:** Si $\tilde{f}(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, pruebe que

*a)* $\mathcal{L}_{t\to s}\{u_a(t)f(t-a)\} = e^{-as}\tilde{f}(s)$.

*b)* $\mathcal{L}_{t\to s}\{e^{\beta t}f(t)\} = \tilde{f}(s-\beta)$.

*c)* $\mathcal{L}_{t\to s}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\tilde{f}(s)$.

donde se define la función escalón $u_a(t)$ como:

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

**Problema 10:** Calcule las transformadas de Laplace de:

*a)* $f(t) = e^{at}$, *b)* $f(t) = \frac{\sin(at)}{a}$, *c)* $f(t) = \frac{\cos(at)}{a}$.

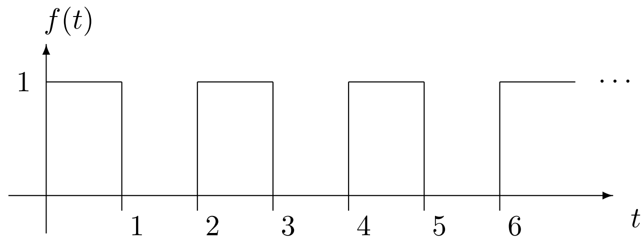
**Problema 11:** Pruebe que si $h(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$, entonces $\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$.

**Problema 12:** Sea $\mathcal{L}_{t\to s}\{f(t)\}$ la transformada de Laplace de una función continua por tramos $f(t)$ con período $T$. Demuestre que:

$$\mathcal{L}_{t\to s}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt, \qquad (\Re\{s\} > 0).$$

Hint: Use que: $\int_0^\infty = \int_0^T + \int_T^{2T} + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} + \cdots$, haga el cambio de variable: $\tau = t-(n-1)T$ en la $n$-ésima integral.

**Problema 13:** Utilice el resultado del problema anterior para calcular la transformada de Laplace $\mathcal{L}_{t\to s}\{f(t)\}$ de la función dibujada a continuación:




**Problema 14:** ¿De qué función es

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

la transformada de Laplace?

**Problema 15:** Considere un péndulo ideal que cuelga bajo la acción de la gravedad y es perturbado por una fuerza tangente a la trayectoria dada por:

$$F(t) = F_o\,\cos(\omega\,t)$$

*a)* Determine en la aproximación de oscilaciones pequeñas el ángulo de desviación del equilibrio utilizando la transformada de Laplace.

*b)* Indique para qué valores de $\omega$ no se mantendrá válida para todo $t$ la aproximación de pequeñas oscilaciones y explique porqué.

**Problema 16:** Tres núcleos radioactivos decaen sucesivamente en serie, de forma tal que los números $N_i(t)$ de cada tipo obedecen las ecuaciones

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3.$$

Si inicialmente $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_3 = n$, calcule $N_3(t)$ utilizando transformadas de Laplace.