Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 7 (2014)

Problema 1: Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones

a) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2x)$

b) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

c) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$

d) $y'' - y' - 2y = \cosh(2x)$

e) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin(x)$

f) $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x),\ \omega^2 \neq \omega_0^2$

Problema 2: Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

a) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y = 3\sin(2x), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

c) $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

d) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Problema 3: Utilize variación de parámetros para hallar una solución particular de las siguientes ecuaciones

a) $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$.

b) $x^2 y'' - 2y = 3x^2 - 1, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-1}$.

c) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x), \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2\ln(x)$.

d) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 3x^{3/2}\sin(x), \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-1/2}\sin(x), \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos(x)$.

Problema 4: Utilize reducción de orden para encontrar una solución independiente de la dada

a) $x^2 y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = x$.

b) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = x$.

c) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = \sin(x^2)$.

Problema 5: Calcule la solución general de las siguientes ecuaciones

a) $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$.

b) $2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy', \quad x > 0$.

c) $x^2 y'' = (y')^2, \quad x > 0$.

d) $yy'' + (y')^2 = 0$.

e) $2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1$.

f) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Problema 6: Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

a) $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

b) $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

c) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 3x^{-2}, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1$

d) $y'y'' - x = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 1$.

Problema 7: Hallar dos soluciones linealmente independientes, como series de potencias de x para las ecuaciones

a) $y'' - x^2 y = 0$

b) $y'' + y = 0$

c) $y'' + 3x^2 y' - xy = 0$

d) $y'' + x^3 y' + x^2 y = 0$

¿Para qué valores de x converge cada soución?

Problema 8: Calcule la solución de $(1 + x^2)y'' + y = 0$ como serie de potencias de x que satisface $y(0) = 0$, y $y'(0) = 1$.

Problema 9: La ecuación de *Chebyshev* es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \quad \alpha \text{ constante.}$$

a) Calcule dos soluciones en serie linealmente independientes válidas para $|x| < 1$.

b) Muestre que para todo entero no negativo $\alpha = n$ hay una solución polinómica de grado n. Normalizados apropiadamente, estas soluciones se conocen como "polinomios de Chebyshev."

Problema 10: Recuerde que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

es el n-ésimo polinomio de *Legendre*. Muestre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad (n \neq m).$$

Sugerencia: Pruebe que $[(1 - x^2)P_n']' = -n(n + 1)P_n$, y análogamente para P_m. Pruebe luego que $P_m[(1 - x^2)P_n']' - P_n[(1 - x^2)P_m']' = [m(m + 1) - n(n + 1)]P_m P_n$ e integre entre -1 y 1.

Problema 11: Usando el hecho que $P_0(x) = 1$ es una solución de

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0,$$

encuentre la segunda solución independiente mediante reducción de orden.

Problema 12: Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

a) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

b) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$

c) $2x^2 y'' + xy' - y = 0$

d) $x^2 y'' - 5xy' + 9y = x^3$

Problema 13: Muestre que $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares para la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

Encuentre el polinomio indicial y sus raíces para el punto $x = 1$.

Problema 14: Considere la ecuación

$$x^2 y'' + xe^x y' + y = 0.$$

a) Calcule el polinomio indicial y sus raíces.

b) Calcule los coeficientes $c_1,\ c_2,\ c_3$ de la solución

$$\phi(x) = |x|^i \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (c_0 = 1).$$

Problema 15: Obtenga dos soluciones linealmente independientes de las siguientes ecuaciones válidas alrededor de $x = 0$.

a) $x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$

b) $x^2y'' + 5xy' + (3-x^3)y = 0$

c) $x^2y'' + 2x^2y' - 2y = 0$

d) $x^2y'' - 2x^2y' + (4x-2)y = 0$

Problema 16: Considere la ecuación de Bessel de orden cero

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

sabiendo que

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

es una solución, calcule la solución linealmente independiente $K_0(x)$ *(función de Bessel de segunda clase de orden cero).*

Problema 17: Muestre que $J_0'(x)$ satisface la ecuación de Bessel de orden 1

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0.$$

Problema 18: La *función Gamma* de variable compleja se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1}dx, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Pruebe que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y que $\Gamma(n+1) = n!$ si n es natural.

Muestre que la solución regular en el origen (solución de primera clase) de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

es

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

Problema 19: Considere la ecuación

$$L[y] = \frac{1}{r(x)}\Big[(p(x)y')' - q(x)y\Big] = -\lambda y, \quad a \le x \le b, \tag{1}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x) > 0$, son funciones reales contínuas. Pruebe que la condición de Hermiticidad

$$\int_a^b r(x)\overline{u(x)}L[v](x)dx = \int_a^b r(x)\overline{L[u](x)}v(x)dx$$

vale para todo par de soluciones de (1) $u(x),\ v(x) \in \mathbb{C}^2([a,b])$, que satisfacen la condición de contorno $[\bar{u}(x)p(x)v'(x) - \bar{u}'(x)p(x)v(x)]_a^b = 0$.

Problema 20: Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad -\infty \le x < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

a) Muestre que el factor integrante $p(x) = e^{-x^2}$ lleva esta ecuación a la forma de Sturm-Liouville.

b) Plantee una solución en serie de potencias para (2) y muestre que la solución para $\lambda = 2n$, que satisface las condiciones de contorno correctas, es un polinomio de grado n.

Problema 21: Resuelva el siguiente problema de valores de frontera como un problema de Sturm-Liouville inhomogéneo:

$$y'' + 2y + x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Problema 22: Considere el problema inhomogéneo

$$\begin{gathered} xy'' + y' + xy = f(x), \qquad 0 \leq x \leq 2, \\ y'(0) = 0, \quad y(2) = 0. \end{gathered}$$

a) Halle los autovalores y autofunciones (normalizadas) del problema de Sturm-Liouville homogéneo asociado

$$\begin{gathered} xy'' + y' + \lambda xy = 0, \qquad 0 \leq x \leq 2, \\ y'(0) = 0, \quad y(2) = 0. \end{gathered}$$

b) Exprese la solución del problema inhomogéneo como expansión en autofunciones del problema homogéneo, explicitando las expresiones integrales que definen los coeficientes de la expansión.