Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC
Análisis Matemático IV - 2008
Guía N° 9

Problema 1: En cada uno de los siguientes casos, verificar que las funciones y_1 e y_2 son soluciones de la correspondiente ecuación homogénea y luego hallar una solución particular de la no homogénea. En (c), $g(x)$ es una función continua arbitraria.

(a) $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0, \quad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = te^t$

(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 \ln x$

(c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = g(x), \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$

Problema 2: Considerar la ecuación no homogénea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (*)$$

y supongamos que se conoce una solución $y_1(t)$ de la correspondiente ecuación homogénea. Demostrar que $y(t) = v(t)y_1(t)$ es solución de (*) si v satisface

$$y_1(t)v'' + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))v' = g(t). \qquad (**)$$

Como (**) es lineal de primer orden en v', resolviendo (**) se calcula v', e integrando el resultado y multiplicando por y_1 se obtiene la solución general de (*).

Problema 3: Aplicar el Problema 2 para resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $t^2y'' - 2ty' + 2y = 4t^2, \; t > 0, \; y_1(t) = t,$ (b) $t^2y'' + 7ty' + 5y = t, \; t > 0, \; y_1(t) = t^{-1}$

(c) $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0, \quad y_1(t) = 1 + t$

(d) $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1, \quad y_1(t) = e^t$

Problema 4: Para las matrices A que se listan a continuación, hallar la solución general del sistema $X' = AX$. En los incisos (a)–(b), (e)–(h), describir el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$, dibujar el campo de direcciones y esbozar a partir de él las soluciones. En el inciso (d), calcular la solución que satisface la condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -3 & 5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 5: Considerar el sistema $X' = AX$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Resolver el sistema para $\alpha = 2$, calcular los autovalores de A y decir qué tipo de punto de equilibrio es el origen.
(b) Repetir (a) para $\alpha = 1/2$.
(c) Observar la diferencia de comportamiento entre las soluciones de (a) y las de (b). Calcular los autovalores de A en términos de α y luego determinar el valor $1/2 < \alpha_0 < 2$ donde cambia el comportamiento de las soluciones. Este valor α_0 se denomina *punto de bifurcación*.

Problema 6: Hallar la solución general de los siguientes sistemas (en (c), $0 < t < \pi$):

(a) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$, (b) $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$, (c) $X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$

Problema 7: Dado el sistema $tX' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$, $t > 0$, verificar que $X^c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$ es solución del sistema homogéneo y luego resolver el no homogéneo.