

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC
Análisis Matemático IV – 2008
Guía N° 1

Problema 1: Reducir las siguientes expresiones a la forma $x + iy$.

a) $(2 - 3i)(2 + 3i)$

b) $\frac{(3 + i)}{3 - 4i} - \frac{(2 - i)}{8i}$.

Problema 2: Determinar $\bar{z}$, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ y $|z|$.

a) $z = 4i - 3$

b) $z = -2i$

c) $z = (4i)^2$

Problema 3: Probar que

a) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

b) $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$

c) Si $|z_2| \neq |z_3|$, $\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{\left| |z_2| - |z_3| \right|}$

d) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Problema 4: Graficar en el plano los conjuntos donde z satisface:

a) $|z| = 1$

b) $\operatorname{Im}(z) = 0$

c) $|3z + 2| < 1$

d) $0 < \arg z \leq \pi$

e) $\{\operatorname{Im}(z) \geq 2\} \cup \{\operatorname{Re}(z^2) > 0\}$

f) $\operatorname{Im}(z + 1/z) = 0$

Problema 5: Usar la forma polar para simplificar las siguientes expresiones. Hallar en cada caso el módulo y el argumento principal del resultado.

a) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

b) $\frac{3}{(\sqrt{3} - i)^2}$

c) $(1 + i)^3$

d) $i^5 \cdot i^3$

Problema 6:

a) Probar la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Ayuda: Tomar $s = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y calcular $(1 - z)s$.

b) Mostrar que si c es una raíz n -ésima de la unidad, $c \neq 1$, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$$

Problema 7: Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones y dibujarlas.

a) $z^5 - 32 = 0$

b) $z^2 - 2i = 0$

c) $z^3 + 1 = 0$

Problema 8: Hallar las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en producto de polinomios de grado dos con coeficientes reales.

Problema 9: Representar gráficamente los siguientes conjuntos y determinar cuáles son abiertos y conexos (y por tanto, dominios), cuáles son acotados, y cuáles no son abiertos ni cerrados.

a) $|z - (2 + i)| \leq 1$

b) $\operatorname{Im} z = 3$

c) $|2z + 5| > 2$

d) $|z - 4| \geq |z|$

e) $0 < \arg z < \pi/4 \quad (z \neq 0)$

f) $\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2 \quad (z \neq 0)$

Problema 10: Representar la clausura de los siguientes conjuntos.

a) $-\pi < \arg z \leq \pi \quad (z \neq 0)$

b) $|\operatorname{Re} z| < |z|$

c) $|\operatorname{Im} z| \leq 1/2$

d) $\operatorname{Re} z^2 > 0$

Problema 11: Determinar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos.

a) $z_n = i^n \quad (n = 1, 2, \dots)$

b) $z_n = i^n/n \quad (n = 1, 2, \dots)$

c) $0 \leq \arg z < \pi/2 \quad (z \neq 0)$

d) $z_n = \frac{(-1)^n(1+i)(n-1)}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$

Problema 12: Probar que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ puede ser escrita en la forma $z^2 - \bar{z}^2 = 2$.

Problema 13: Usando el hecho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2 , decir qué curvas describen los siguientes conjuntos:

a) $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$

b) $|z - 1| = |z + i|$.

Problema 14: Probar la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos \alpha + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(n\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})\alpha)}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}$$