Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC

Análisis Matemático IV – 2008

Guía N° 2

Problema 1: Describir el dominio de definición de las siguientes funciones y expresar $f(z)$ en la forma $u(x, y) + iv(x, y)$:

(a) $f(z) = z^3 + z - 1$ (b) $f(z) = \dfrac{\overline{z} - 1}{z^2 + 1}$.

Problema 2: Demostrar, usando la definición de límite, que

(a) $\displaystyle \lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}^2}{z} = 0$.

(b) Determinar si existe $\displaystyle \lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.

Problema 3: Hallar los siguientes límites:

(a) $\displaystyle \lim_{z \to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$ (b) $\displaystyle \lim_{z \to \infty} \frac{4z^2}{(z - 1)^2}$ (c) $\displaystyle \lim_{z \to \infty} \frac{z^2 + 1}{z + 1}$.

Problema 4: Analizar por definición donde existe $f'(z)$ y hallar su valor.

(a) $f(z) = \mathrm{Im}\, z$ (b) $f(z) = |z|^2$.

Problema 5: Usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar si existe $f'(z)$. Si existe, calcularla:

(a) $f(z) = iz + 2$ (b) $f(z) = \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

(c) $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$ (d) $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

Problema 6: Sea f una función analítica en un dominio D. Probar que cualquiera de las condiciones siguientes implica que f es constante en D.

(a) $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$.

(b) Re $f(z) = c$, para todo $z \in D$, donde $c \in \mathbb{C}$.

(c) $|f(z)| = cte$, para todo $z \in D$.

Problema 7: Si $f(z)$ es analítica, probar que las curvas $u(x, y) = C_1$ y $v(x, y) = C_2$, donde C_1 y C_2 son constantes, se intersecan ortogonalmente siempre que $f'(z) \neq 0$ en el punto de intersección. Dichas curvas se denominan *curvas de nivel*.

(a) Trazar una parte de las curvas $|f(z)| =$ constante, $\mathrm{Arg}(f(z)) =$ constante para la función $f(z) = 1/z$ y verificar que son ortogonales donde se cortan.

(b) Trazar una parte de las curvas $u =$ constante, $v =$ constante para la función $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$ y verificar que son ortogonales donde se cortan.

Problema 8: Hallar una f analítica en el abierto $\{z : |z| > 1\}$ tal que $[f(z)]^2 = z^2 - 1$.

Problema 9: Sea $f(z) = \frac{1}{z}$.

(a) ¿Cuál es la imagen de un círculo de radio r centrado en 0?

(b) ¿Cuál es la imagen de un círculo de radio a centrado en a? (a real).

(c) ¿Cuál es la imagen de un sector $\{z \mid \alpha \leq \arg z \leq \beta\}$?

Problema 10: Considerar la función $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

(a) ¿Cuál es la imagen de un círculo de radio r?.

(b) ¿Cuál es la imagen del semianillo circular $\{z = re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 1 \leq r \leq b\}$, con $b \geq 1$?.

(c) ¿Cuál es la preimagen del semiplano $\{w : \operatorname{Im} w \geq 0\}$?.

Problema 11: Encontrar el conjunto de puntos que satisfacen $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = c$, para una constante c arbitraria.

Problema 12: Sea $(u(x,y), v(x,y))$ un campo de clase C^1 en el plano. El campo (u,v) se dice *incompresible* (respectivamente *irrotacional*) si su divergencia $u_x + v_y$ (respectivamente su rotor $v_x - u_y$) se anula idénticamente. Mostrar que la función $f = u - iv$ es analítica si y sólo si el campo (u,v) es irrotacional e incompresible.

Problema 13: Sea $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$ un número complejo no nulo. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Definiendo $U(r,\alpha) = u(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$ y V análogamente, tenemos que

$$f(re^{i\alpha}) = F(r,\alpha) = U(r,\alpha) + iV(r,\alpha)$$

Usar la regla de la cadena para mostrar que las derivadas parciales de u y v existen y son continuas en z_0 si y sólo si lo mismo sucede para U y V.

Probar que u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en z_0 si y sólo si U y V satisfacen las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann polares en el punto (r_0, α_0):

$$U_r = \frac{1}{r}V_\alpha \quad \text{y} \quad \frac{1}{r}U_\alpha = -V_r$$

Mostrar que si se cumplen las condiciones anteriores, entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= e^{-i\alpha_0}\big(U_r(r_0,\alpha_0) + iV_r(r_0,\alpha_0)\big) \\ &= \frac{1}{r_0}e^{-i\alpha_0}\big(V_\alpha(r_0,\alpha_0) - iU_\alpha(r_0,\alpha_0)\big) \end{aligned}$$

Problema 14: Verificar que $u(x,y)$ es armónica en algún dominio y hallar la armónica conjugada $v(x,y)$ en los casos siguinetes

(a) $u(x,y) = 2x(1-y)$.

(b) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.

(c) $u(x,y) = y/(x^2+y^2)$.

(d) $u(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$.

(e) $u(x,y) = \operatorname{Re}\left(z/(z^3-1)\right)$.

Problema 15: Halle el polinomio armónico más general de la forma $p(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$.