

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC

Análisis Matemático IV – 2008

Guía N° 3

Problema 1: Probar que

a) $\exp(\frac{2+\pi i}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}} (1+i)$ b) $\exp(z + \pi i) = -\exp(z)$

Problema 2: Hallar los valores de z para los cuales:

a) $e^z = -2$ b) $e^{2z-1} = 1$ c) $|e^{-2z}| < 1$
d) $\text{Im}(e^z) = 0$ e) $\text{Re}(e^z) = 0$ f) $\text{Arg}(e^z) = \pi/4$

Problema 3: Probar que $\exp(\bar{z})$ no es analítica en ningún punto.

Problema 4: Graficar la imagen por $\exp(z)$ de los siguientes conjuntos:

- a) $\text{Re}(z) = a$, con a constante.
- b) $a \leq \text{Re}(z) \leq b$, con a, b constantes.
- c) $\text{Im}(z) = c$, con c constante.
- d) $c \leq \text{Im}(z) \leq d$, con c, d constantes.
- e) $R = \{z \mid A \leq \text{Re}(z) \leq B, C \leq \text{Im}(z) \leq D\}$.
- f) La recta $y = ax$, ($a \neq 0$).

Problema 5: Para $r > 0$, sea $A = \{\omega \mid \omega = \exp(1/z), 0 < |z| < r\}$; determine el conjunto A .

Problema 6: Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $\cos z = 2$ b) $\cos z = 0$
c) $\sin z = 2$ d) $\sin z = \cos z$

Problema 7: Pruebe las siguientes identidades:

a) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ b) $\sin(\pi/2 - z) = \cos z$
c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ d) $\tan(2z) = \frac{2 \tan(z)}{1 - \tan^2(z)}$
e) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$

Problema 8: Hallar las raíces de las ecuaciones:

a) $\cosh z = 1/2$ b) $\sinh z = i$ c) $\cosh z = -2$

Problema 9: Considere la función $f(z) = \sin z$, y la región del plano complejo $B = \{z = x + iy \mid -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0\}$.

- a) Pruebe que la frontera de B se mapea inyectivamente sobre el eje real.
- b) Calcule y grafique las imágenes de una semirrecta vertical $x = c, y \geq 0$, interior a la banda.
- c) Pruebe B se mapea inyectivamente sobre la clausura (cierre) del semiplano superior.
- d) ¿Cuál es la imagen de una región rectangular $-\pi \leq x \leq \pi, a \leq y \leq b$ ubicada en el semiplano superior?

Problema 10: ¿Qué región del plano complejo se mapea inyectivamente sobre el semi-plano superior por la aplicación:

- a) $\cos z$ b) $\sinh z$?

Problema 11: Calcular:

- a) $\operatorname{Log}(-ei)$ b) $\operatorname{Log}(1-i)$ c) $\operatorname{Log}(1+e^{-i\theta})$, $-\pi < \theta < \pi$

Problema 12: Probar que

a) $\operatorname{Log}[(1+i)^2] = 2\operatorname{Log}(1+i)$

b) $\operatorname{Log}[-(1+i)^2] \neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$

Problema 13: Probar que para todo par de complejos z_1 y z_2 no nulos

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2N\pi i$$

siendo N uno de los valores $0, \pm 1$. Probar que si z_1 y z_2 pertenecen al cuadrante $x > 0$, $y > 0$, entonces $N = 0$.

Problema 14: Recuerde que el *dominio de analiticidad* (o rama) es aquel en que la función es *analítica*. En el caso de la función $\operatorname{Log}(z)$, el dominio de analiticidad es $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ y a esta rama se la denomina rama principal. Determine el mayor dominio de analiticidad de

$$f(z) = \operatorname{Log}(z - (3 + 4i))$$

y calcule $f(0)$.

Problema 15: Utilizando la definición de potencia compleja $z^c = e^c \log(z)$,

- a) Calcule $\sqrt{9}$. b) Demuestre que 9^π tiene infinitos valores.

Problema 16: Hallar una f analítica en el abierto $\{z : |z| > 1\}$ tal que $[f(z)]^2 = z^2 - 1$.

Problema 17: Pruebe que la parte real de la función $z^{\frac{1}{2}}$ es siempre positiva.

Problema 18: Sea $G = \mathbf{C} - \{z \in \mathbf{R} \mid z \leq 0\}$ y sea n un entero positivo. Encuentre todas las funciones analíticas $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ tales que $z = (f(z))^n$, para todo $z \in G$.

Problema 19: Hallar todos los valores de

- a) $(1+i)^i$ b) $(-1)^{1/n}$, $n \in \mathbf{Z}$ c) $\log(i^{1/2})$

Problema 20: Hallar el valor principal de

- a) i^{-i} b) $[(e/2)(-1 - \sqrt{3}i)]^{3\pi i}$ c) $(1-i)^{4i}$

Problema 21: Analice las propiedades del mapeo $(1-z)^i$.

Problema 22: Sea c un complejo no nulo. ¿Qué restricción debe cumplir c para que todos los valores de $|i|^c$ sean iguales?

Problema 23: Suponiendo que $f'(z)$ existe, hallar la expresión de la derivada $\frac{d}{dz}(c^{f(z)})$.

Problema 24: Pruebe *algunas* de las siguientes fórmulas:

a) $\arcsen z = -i \log(iz \pm \sqrt{1-z^2})$ b) $\arccos z = -i \log(z \pm \sqrt{z^2-1})$

c) $\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$

Problema 25: Encontrar: a) $\arctan(2i)$ b) $\arctan(1-i)$.