

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC
Análisis Matemático IV – 2008
Guía N° 4

Problema 1: Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (1 + it^2) dt$ b) $\int_0^\infty e^{-zt} dt$

Problema 2: Probar que si n y m son enteros,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2\pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

Problema 3: Sea f una función continua sobre una curva C , continuamente diferenciable, parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow C$. Si $\gamma^-(t) : [c, d] \rightarrow C$ es una reparametrización de γ que invierte la orientación. Muestre que $\int_{\gamma^-} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz$

Problema 4: Suponer que $f(z)$ es analítica en un punto $z_0 = z(t_0)$ de un arco diferenciable $z = z(t)$, ($a \leq t \leq b$). Probar que si $w(t) = f(z(t))$ entonces en $t = t_0$ se cumple que

$$w'(t) = f'(z(t))z'(t).$$

Problema 5:

- a) Calcular $\int_C \cos z dz$ donde C es la poligonal obtenida conectando en ese orden los puntos $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = \frac{\pi}{2} + i$, $z_3 = -\frac{\pi}{2} + i$, $z_4 = -\frac{\pi}{2}$.
- b) Calcular $\int_C \bar{z} dz$, donde C es el círculo de radio 1 centrado en 0 orientado positivamente.

Problema 6: Hallar la integral

$$\int_C z^{-1+i} dz,$$

donde el integrando usa la determinación $0 < \arg z < 2\pi$ y C es el círculo de radio 1 centrado en 0 orientado positivamente.

Problema 7: Calcule $\int_{C_R} z^n \operatorname{Log}(z) dz$ para n entero donde C_R es el círculo de radio $R > 0$ centrado en 0 y orientado positivamente.

Problema 8: Pruebe que

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n \neq 0)$$

cuando C_0 es cualquier contorno cerrado que no pasa por el punto z_0 .

Problema 9: Sea $p(z)$ un polinomio de grado n y sea R suficientemente grande para que p no se anule en $\{z \in \mathbb{C}; |z| \geq R\}$. Sea γ el círculo de radio R y centro 0 orientado positivamente. Muestre que $\int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n$.

Ayuda: expresar $p(z)$ como producto de factores lineales.

Problema 10: Hallar el dominio de analiticidad de la función f , y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para probar que $\int_C f(z) dz = 0$ cuando el contorno simple cerrado C es círculo $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ b) $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$ c) $f(z) = \operatorname{Log}(z+2)$

Problema 11: Sean C y C_0 dos contornos simples cerrados, orientados positivamente, siendo C_0 interior a C . Demostrar que si f es analítica en la región comprendida entre C y C_0 , entonces

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz$$

Problema 12: Teniendo en cuenta el valor de la integral de $(z - z_0)^{n-1}$, n entero, sobre un círculo $|z - z_0| = R$ tomado en sentido positivo, calcular la integral $\int_C (z - 2 - i)^{n-1} dz$ cuando C es la frontera del rectángulo $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, tomada en sentido positivo, y n es un número entero. Observar que el caso $n = 0$ es especial.

Problema 13: Calcular cada una de las siguientes integrales en las que el camino es un contorno arbitrario entre los límites de integración:

a) $\int_1^3 (z - 2)^3 dz$ b) $\int_0^{\pi+2i} \cos(z/2) dz$ c) $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$

Problema 14: Denotemos por C toda la frontera, con orientación positiva, del semidisco $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y sea $f(z)$ una función continua definida en ese semidisco, dada por $f(0) = 0$ y

$$f(z) = z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2})$$

Probar que $\int_C f(z) dz = 0$ ¿Es aplicable aquí el teorema de Cauchy-Goursat?

Problema 15: Use la fórmula de Cauchy para calcular las siguientes integrales, donde C es la curva $\{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\} \cup [-R, R]$ orientada positivamente y $R > \max\{b, 1\}$.

a) $\int_C \frac{dz}{z^2 + z + 1}$ b) $\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} dz, 0 < a < b$

Problema 16: Sea f continua en una región cerrada y acotada R , siendo analítica y no constante en su interior. Suponiendo que $f(z) \neq 0$ en todo R , demostrar que $|f(z)|$ tiene un mínimo el que se alcanza en la frontera de R , y nunca en su interior.

Encuentre un ejemplo en donde se demuestre que la hipótesis $f(z) \neq 0$ es necesaria.

Problema 17: Considere $f(z) = (z + 1)^2$ y la región triangular cerrada R con vértices en $z = 0$, $z = 2$ y $z = i$. Hallar los puntos de R donde $|f(z)|$ alcanza su máximo y su mínimo.

Problema 18: Suponga que f es entera y que $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ está acotada superiormente. Pruebe entonces que f es constante.

Ayuda: componga con la función $\exp(z)$.

Problema 19: Si $f(z)$ es analítica y no idénticamente nula en $|z| < R$ y $f(0) = 0$, probar que existe un número $R_1 < R$ tal que $f(z) \neq 0$ en $0 < |z| < R_1$.

Problema 20: Sin calcular la integral, comprobar las siguientes acotaciones:

a) Si C es el arco de círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ entre $z_1 = 2$ y $z_2 = 2i$ en el primer cuadrante,

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

b) Si C es la frontera del triángulo con vértices en $z_1 = 0$, $z_2 = 3i$ y $z_3 = -4$,

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60$$

Problema 21: Denotemos por C la frontera del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$ donde C se recorre en sentido positivo. Calcular las siguientes integrales usando la fórmula integral de Cauchy para una función o sus derivadas.

a) $\int_C \frac{e^{-z} dz}{z - (\pi i/2)}$ b) $\int_C \frac{z dz}{2z + 1}$ c) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$