

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC

Análisis Matemático IV – 2008

Guía N° 5

Problema 1: Hallar la región de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}, a \in \mathbb{C}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2} z^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2}) z^n$

Problema 2: Dada una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existe y es finito o bien infinito, entonces es igual al radio de convergencia de la serie. *Sugerencia: Aplicar el criterio del cociente.*

Problema 3: Pruebe que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$$

es 1, y analice la convergencia para $z = 1, -1$ e i . (*Atención: el n -ésimo coeficiente de la serie no es $\frac{(-1)^n}{n}$.*)

Problema 4: a) Sea $f_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}}$ para $x \in [-1, 1]$. Mostrar que f_n converge puntualmente a cierta función pero no uniformemente. ¿Qué sucede si $x \in (0, 1)$?

Problema 5: Demostrar que la serie siguiente no es uniformemente convergente para $|z| < 1$

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

Problema 6: Pruebe que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z e^{-nz}$$

converge absolutamente pero no uniformemente en el sector $|z| \leq R, |\arg z| \leq \delta$, cuando $0 < \delta < \pi/2$. ¿Es la convergencia uniforme cuando $r \leq |z| \leq R, |\arg z| \leq \delta$?

Problema 7: Hallar el desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados, y determine el radio de convergencia de la serie.

a) $f(z) = 1/z^2$ en $z_0 = -1$, b) $f(z) = e^z$ en $z_0 = 0$
c) $f(z) = \sqrt{z}$ en $z_0 = -1$ d) $f(z) = \log z$ en $z_0 = i$.

Problema 8: Hallar la serie de Taylor o de Laurent de las siguientes funciones en el punto indicado. Indicar además la región de convergencia.

a) $\frac{1}{4 - 3z}$, $a = 0$, b) $\frac{1}{2z - i}$, $a = -1$, c) $\frac{\cos(z^2)}{z^4}$, $a = 0$, d) $e^{z^2 - z}$, $a = 0$.

Problema 9: Encontrar el dominio de convergencia de la serie

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1+z} + \left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \dots$$

¿Cuál es el valor de $f(z)$ en ese dominio?

Problema 10: Derivar o integrar término a término una serie conocida para obtener los desarrollos en serie de las siguientes funciones en $z_0 = 0$:

a) $\frac{1}{(1-z)^2}$ b) $-z \cos(z) + \sin(z)$ c) $2ze^{z^2-1}$ d) $(z+1)^{3/2}$

Problema 11: Integrar la serie de Maclaurin para $1/(1+s)$ a lo largo de un contorno interior al círculo de convergencia, de $s = 0$ a $s = z$, para obtener la representación siguiente:

$$\text{Log}(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Problema 12: Pruebe que la función

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} z^n$$

es analítica cuando $|z| < 1$ y que su derivada es $af(z)/(1+z)$. Con esto demuestre que la derivada de $(1+z)^{-a}f(z)$ es cero, y deduzca que

$$f(z) = (1+z)^a.$$

(Nota: $(1+z)^a = \exp(a \text{Log}(1+z))$.)

Problema 13: a) Desarrollar $\sinh(z)$ en potencias de $z - \pi i$ para probar que

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{\sinh(z)}{z - \pi i} = -1$$

b) Probar que si $f(z) = z^{-1} \text{Log}(z+1)$ cuando $z \neq 0$ y $f(0) = 1$, entonces f es analítica en el dominio $\{|z| < 1\}$.

Problema 14: Dar los desarrollos en serie de Laurent de cada una de las siguientes funciones en los anillos que se indican:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-2)} \text{ en } \begin{cases} |z| < 1 \\ 0 < |z-2| < 1 \end{cases} \\ f(z) &= \frac{1}{z^2(1-z)} \text{ en } \begin{cases} 0 < |z| < 1 \\ 1 < |z| < \infty \end{cases} \\ g(z) &= \frac{1}{z(1+z^2)} \text{ en } \begin{cases} 0 < |z-i| < 1 \\ 1 < |z-i| < 2 \\ 2 < |z-i| < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 15: Encontrar el desarrollo de Laurent para:

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)(z-1)} \text{ válida en } 1/2 < |z| < 1$$

y también para la misma función en el anillo $0 < |z+1/2| < 3/2$. ¿En dónde son válidos simultáneamente los dos desarrollos?

Problema 16: Hallar los cuatro primeros términos distintos de cero de las series de Laurent de las funciones:

a) $g(z) = e^z \cos z$ alrededor de $z_0 = 0$,

b) $f(z) = \tan(\pi z)$ alrededor de $z_0 = 1/2$, en $0 < |z-1/2| < 1$.

Problema 17: Sea $f(z)$ analítica en $|z| < R$ y $f(z) \neq 0$. Probar que existe $R_1 < R$ tal que $f(z) \neq 0$ en $0 < |z| < R_1$.