Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC

Análisis Matemático IV – 2008

Guía N° 6

Problema 1: Escribir la parte principal de las siguientes funciones en cada una de sus singularidades aisladas. Determine qué tipo de singularidad es.

a) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-\pi)}$ b) $z \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ c) $\dfrac{z^2}{1+z}$

Problema 2: Demostrar que las singularidades de las funciones siguientes son polos. Determinar su orden y los correspondientes residuos:

a) $\dfrac{1-\cosh z}{z^3}$ b) $\tanh z$ c) $\dfrac{z}{\cos z}$

Problema 3: Hallar el residuo en $z=0$ de $e^{z+\frac{1}{z}}$.

Problema 4: Si C es el círculo unitario tomado en sentido positivo, evaluar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$ b) $\displaystyle\int_C e^{1/z}\frac{dz}{z}$ c) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{z(z+2)}dz$

Problema 5: Calcular la integral

$$\int_C \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz,$$

donde C es el círculo $|z-2|=2$ y $|z|=4$ respectivamente.

Problema 6: Probar las fórmulas siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right) \quad (a>b>0)$

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{3}$

f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad -1<a<1.$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\theta)^{2n} d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$

h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{1+x^2} = 0$ i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$

Problema 7: Calcular la siguiente integral : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2}dx$

Ejercicio Adicional

Problema 8: Sea γ el polígono uniendo los puntos $n+\frac{1}{2}+in$, $-n-\frac{1}{2}+in$, $-n-\frac{1}{2}-in$ y $n+\frac{1}{2}-in$.

a) Calcular $\int_\gamma \pi(z+a)^{-2}\cot(\pi z)\,dz$, si a no es un entero y probar que $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma \pi(z+a)^{-2}\cot(\pi z)\,dz = 0$.

Ayuda: Use el hecho que para $z = x+iy$, $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^y$ y $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$ para mostrar que $|\cot \pi z| \leq 2$ para z sobre γ si n es suficientemente grande.)

b) Probar que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}.$$

c) Probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$