

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC

Análisis Matemático IV – 2008

Guía N° 7

Problema 1: Sea $f(x)$ una función periódica de período 2π definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Calcular los coeficientes de Fourier de f , obtener su serie de Fourier y analizar la convergencia de la misma.

Problema 2: Sea $h(x)$ una función tal que $h(x) = 1 \ \forall x \in [0, \pi]$.

a) Definir la extensión impar de período 2π de h y calcular su serie de Fourier.

b) Hacer lo mismo para la extensión par de período 2π de h .

Problema 3: Dada $f(x) = x$ en el intervalo $[0, \pi]$, escribir a f como una serie de senos y cosenos. (sugerencia: extender f a $[-\pi, 0]$ como la función cero y considerar la extensión de período 2π de f).

Problema 4: Para cada una de las siguientes funciones periódicas, definidas en $[-\pi, \pi]$ calcular la serie de Fourier y estudiar su convergencia.

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x, -\pi < x \leq \pi, f(-\pi) = 0$.

Problema 5: Evaluar la serie de la función en el problema 3) en $x = 0$ para obtener la identidad

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Problema 6: Considerar la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \sqrt{n}, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Probar que $f_n(x) \rightarrow 0$ puntualmente, sin embargo $f_n \not\rightarrow 0$ en media cuadrática.

Problema 7: Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Considerando la extensión impar periódica de f a $\mathbb{R}$ calcular los coeficientes $\hat{f}(n)$ y estudiar la convergencia de la serie de Fourier de f . Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x)$.

Problema 8: Hallar los coeficientes $\hat{f}(n)$ de la función $f(\theta) = |\theta|$, en $-\pi \leq \theta \leq \pi$, y calcular el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Problema 9: Sea f una función 2π -periódica en $\mathbb{R}$ tal que en $[-\pi, \pi]$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Calcular su serie de Fourier y usar la identidad de Parseval para hallar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Problema 10: Sea $f(t) = \pi - 2t$ para $0 \leq t \leq \pi$. Escriba los desarrollos en serie de Fourier de f para una extensión periódica, par e impar, respectivamente y estudiar la convergencia de las series obtenidas en cada caso.

Problema 11: Sean f, g funciones periódicas de período 2π .

a) Probar que $\widehat{f \star g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$.

b) Si P es un polinomio trigonométrico probar que $f \star P$ es también un polinomio trigonométrico.

Problema 12: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 1 y tal que f' es continua. Teniendo en cuenta que

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{2\pi i n x}, n \in \mathbb{Z},$$

demostrar que $\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \hat{f}(n)$, $n \neq 0$.