

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC

Análisis Matemático IV - 2008

Guía N° 8

Problema 1: Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales y encontrar sus intervalos de definición:

$$(i) \ x' = \cos(3t), \quad (ii) \ x' = 1/t, \quad (iii) \ x' = x^2 + 1, \\ (iv) \ x' = t^2x, \quad (v) \ x'(x - x^2) = t + t^2.$$

- (a) Para la ecuación (ii) hallar la solución con condición inicial $x(-1) = 2$.
- (b) Para las ecuaciones (ii), (iii) y (iv) dibujar el campo de direcciones y esbozar a partir de él las soluciones.
- (c) Verificar si en algún caso el intervalo de definición de la solución está contenido estrictamente en el intervalo de definición de las funciones involucradas en la ecuación.

Problema 2:

- (a) Encontrar la solución de $x'(t) = 2x^{1/2}$ que pasa por el punto (t_0, x_0) , donde $x_0 > 0$.
- (b) Encontrar todas las soluciones de esta ecuación que pasan por el punto $(t_0, 0)$.

Problema 3: Dada la ecuación $x'x = t$, estudiar existencia y unicidad de las soluciones para distintas condiciones iniciales (x_0, t_0) .

Problema 4: La ecuación $x'(t) = f(t, x)$ se dice homogénea de grado uno si f satisface $f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x)$ para todo número real λ .

- (a) Mediante la sustitución $x = u(t)t$, mostrar que la ecuación puede reducirse a la forma de variables separadas

$$u' = \frac{f(1, u) - u}{t}.$$

- (b) Encontrar todas las soluciones para las siguientes ecuaciones:

$$(i) \ x'(tx + t^2) = x^2, \quad (ii) \ x't = x + te^{-2x/t}.$$

Problema 5: Considerar la ecuación de Bernoulli: $x' + p(t)x = q(t)x^n$.

- (a) Resolver dicha ecuación para $n = 0, 1$. Cuando $n \neq 0, 1$, mostrar que la sustitución $u = x^{1-n}$ reduce la ecuación a una lineal (método de Leibniz).
 - (b) Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones ($\epsilon, \sigma, \Gamma, T$ son constantes):
- (i) $t^2x' + 2tx - x^3 = 0, t > 0,$ (ii) $x' = \epsilon x - \sigma x^3, \epsilon > 0, \sigma > 0,$ (iii) $x' = (\Gamma \cos t + T)x - x^3$

Problema 6: Si $Q(t)$ es la cantidad de Carbono-14 (^{14}C) presente en un fósil en el instante t (en años), se sabe que $Q(t)$ satisface la ecuación diferencial $Q' = -rQ$ (r se denomina constante de decaimiento del ^{14}C).

- (a) Calcular la constante de decaimiento r del ^{14}C teniendo en cuenta que la vida media del ^{14}C es de aproximadamente 5568 años.
- (b) Si la cantidad inicial de ^{14}C es $Q_0 = Q(0)$, obtener la expresión de $Q(t)$ para todo t .
- (c) Mediante mediciones de laboratorio fue posible determinar que la cantidad inicial de ^{14}C presente en un fósil disminuyó un 20%. Determinar la edad del fósil.

Problema 7: Una gota de lluvia esférica se evapora a una tasa proporcional al área de su superficie. Si su radio inicial mide 3mm y al cabo de media hora mide 2mm, hallar la expresión para la longitud del radio de la gota en cualquier instante.

Problema 8: Un tanque tiene inicialmente 160 litros de agua pura. Una solución salada de concentración 100 g/l entra al tanque a razón de medio litro por minuto, y se mezcla muy rápidamente (en nuestra idealización, instantáneamente) con el agua del tanque. Simultáneamente se extrae líquido del tanque a razón de medio litro por minuto.

- (a) Plantear la ecuación diferencial que satisface la cantidad de sal en el tanque.
- (b) Hallar la función que describe la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo.

- (c) Es obvio que al tender el tiempo a infinito, la concentración de sal en el tanque debe tender a 100 g/l. Verificar que esto se cumple usando la función del inciso anterior.
- (d) ¿Cuándo se tendrán 50 g de sal en el tanque?

Problema 9: Un cohete es lanzado verticalmente al espacio desde la superficie terrestre con velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, donde $R = 6,37 \cdot 10^6 m$ es el radio de la Tierra y $g = 9,8 m/seg^2$ es la aceleración de la gravedad.

- (a) Hallar la función $v(x)$ que describe la velocidad en términos de la distancia x a la superficie de la Tierra (despreciar la resistencia del aire).
- (b) Calcular el tiempo requerido para que el cohete recorra 380000 km.

Problema 10: Considerar la ecuación $x' - ax = 0$, donde a es una constante positiva. Sea ϕ_s^a la solución que satisface $\phi_s^a(0) = s$.

- (a) Fijado t , ¿depende $\phi_s^a(t)$ diferenciablemente de s y a ?
- (b) Si s' (respectivamente a') está próxima a s (respectivamente a a), ¿se verifica que ϕ_s^a está **uniformemente** cerca de $\phi_{s'}^{a'}$ para todo $t \in \mathbb{R}$?

Problema 11: Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- (i) $tx' + x = 3t^2 - 1$, para $t > 0$, (ii) $x' - (\tan t)x = e^{\sin t}$, para $0 < t < \pi/2$.

Problema 12: Considerar la ecuación $t^2 x' + 2tx = 1$ en el intervalo $0 < t < \infty$.

- (a) Mostrar que toda solución tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.
- (b) Encontrar la solución ϕ que satisface $\phi(2) = 2\phi(1)$.

Problema 13: Encontrar las soluciones complejas y reales de las siguientes ecuaciones:

- (i) $x'' + x' - 6x = 0$, (ii) $x'' - 6x' + 9x = 0$, (iii) $x'' - 4x' + 5x = 0$,
 (iv) $4x'' + 9x = 0$, (v) $4x'' + 4x' + 5x = 0$, (vi) $x'' + (3i - 1)x' - 3ix = 0$.

Para la primera ecuación, hallar la solución que satisface $\phi(0) = 1$ y $\phi'(0) = 0$.

Problema 14: Sea la ecuación diferencial $y'' + \lambda y = 0$.

- (a) Hallar todos los r reales o complejos tales que $\phi(t) = e^{rt}$ es solución y encontrar todas las soluciones de la ecuación.
- (b) Encontrar los valores de λ tales que la ecuación admita una solución ϕ no idénticamente nula que satisfaga $\phi(0) = \phi(3)$. ¿Cómo se restringen esos valores de λ si además se requiere que $\phi'(0) = -\phi'(3)$?

Problema 15: Sea $y'' + \omega^2 y = 0$, con $\omega > 0$.

- (a) Hallar un sistema fundamental de soluciones complejas de la misma.
- (b) Hallar un sistema fundamental de soluciones reales.
- (c) Expresar cualquier solución de la ecuación como combinación lineal de las soluciones fundamentales halladas.
- (d) Hallar todas las soluciones de la ecuación inhomogénea $y'' + \omega^2 y = A \cos(\lambda t)$. Considerar por separado los casos $\lambda = \omega$ y $\lambda \neq \omega$.

Problema 16: Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:

- (i) $x'' + x' - 2x = 2t$, (ii) $x'' - 2x' - 3x = 3te^{2t}$, (iii) $x'' + 2x' + 5x = 4e^{-t} \cos 2t$.

Para el caso (iii), hallar la solución particular que satisface $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Problema 17: Hallar la solución $x(t)$ de la ecuación $x'' + x = g(t)$ que satisface

$$x(0) = 0, x'(0) = 1, \text{ donde } g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ \pi e^{\pi-t}, & t > \pi \end{cases}, \text{ suponiendo que } x(t) \text{ y } x'(t) \text{ son}$$

continuas en π . **Ayuda:** Resolver el problema con condición inicial para $t \leq \pi$, luego resolver la ecuación para $t > \pi$ y determinar las constantes en esta última solución de modo que $x(t)$ y $x'(t)$ resulten continuas en π .