

Mecánica Cuántica I

Guía 2 – Marzo de 2009

Problema 1: *Transformada de Fourier y operador inversión.* Definimos la transformada de Fourier como

$$(\mathcal{F}f)(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) d^d x$$

y su inversa (que cumple $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I$)

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{k}) d^d k$$

donde d es la dimensión del espacio. El operador inversión Π se define por

$$(\Pi f)(\vec{x}) = f(-\vec{x}).$$

Pruebe que

$$\Pi^2 = I ; \mathcal{F}^{-1} = \Pi \mathcal{F} = \mathcal{F} \Pi ; \mathcal{F} = \Pi \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \Pi$$

$$\mathcal{F}^2 = (\mathcal{F}^{-1})^2 = \Pi ; \mathcal{F}^4 = (\mathcal{F}^{-1})^4 = I$$

Problema 2: Dada

$$\phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-ikx} \psi(x) dx$$

Demuestre que

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n \psi(x)}{dx^n}\right) = (ik)^n \phi(k),$$

$$\mathcal{F}(x^n \psi(x)) = \left(i \frac{d}{dk}\right)^n \phi(k)$$

y la fórmula generalizada de Parseval-Plancherel

$$\int \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx = \int \phi_1^*(k) \phi_2(k) dk.$$

Problema 3: Si $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, pruebe que $\phi(k) = e^{-k^2/2}$ utilizando el siguiente método: Vea que $\psi(x)$ satisface la ecuación $(\frac{d}{dx} + x)\psi(x) = 0$. De las propiedades de la transformada de Fourier vea qué ecuación satisface $\phi(k)$. Encuentre la solución general de esta ecuación. Determine la constante de integración usando la identidad de Parseval-Plancherel o alguna propiedad elemental de las transformadas de Fourier.

Problema 4: Todas las integrales que necesitará en este problema son gaussianas. Muestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha t^2 + \beta t\} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left\{\frac{\beta^2}{4\alpha}\right\}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0.$$

Función de onda gaussiana. Considere la función

$$\psi_{a,\sigma}(x) = N \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2} + ik_o x\right\}, \quad a \text{ real}, k_o \text{ real y } \sigma > 0.$$

a) Determine N para que $\varphi_{a,\sigma}$ esté normalizada ($\int |\psi_{a,\sigma}(x)|^2 dx = 1$). Suponga que esta función normalizada es la función de onda de una partícula y calcule el valor esperado de la posición

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi_{a,\sigma}(x)|^2 dx$$

y la dispersión cuadrática asociada $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$.

b) Determine la transformada de Fourier de esta función de onda

$$\phi_{a,\sigma}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi_{a,\sigma}(x) dx .$$

c) Calcule el valor esperado del momento

$$\langle p \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} k |\phi_{a,\sigma}(k)|^2 dk$$

y la dispersión asociada.

d) ¿Cuánto vale el producto de las dispersiones calculadas?

e) Suponga que la partícula es libre y tiene masa M . Determine la evolución temporal de la función de onda. Repita los cálculos anteriores (valores esperados, dispersiones, etc.) y discuta el comportamiento temporal.

f) Calcule la densidad de corriente de probabilidad para este paquete gaussiano y verifique que se satisface la ecuación de continuidad.

Problema 5: *Relación de incerteza entre el ancho de banda y la duración de una señal.* Suele decirse que las relaciones de incerteza son características de la mecánica cuántica. Quien se haya ocupado del análisis y procesamiento de señales temporales sabe que esto no es cierto. Considere una señal $t \rightarrow f(t)$, por ejemplo la amplitud de una corriente eléctrica, o de una señal sonora, etc. Si \hat{f} es la transformada de Fourier de f ,

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

la fórmula de inversión

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega$$

exhibe a f como superposición de oscilaciones puras $t \rightarrow e^{i\omega t}$ de frecuencia $\omega/(2\pi)$. Es un hecho matemático que $|f|$ y $|\hat{f}|$ no pueden estar ambas muy concentradas (o sea tomar valores apreciablemente distintos de cero en regiones pequeñas) a la vez. Si

$$\langle t \rangle_f = \frac{\int t |f(t)|^2 dt}{\int |f(t)|^2 dt}$$

y

$$\langle \omega \rangle_f = \frac{\int \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}$$

denotan los valores esperados (o promedio) del tiempo y de la frecuencia respectivamente, las respectivas dispersiones

$$(\Delta t)_f^2 = \langle (t - \langle t \rangle_f)^2 \rangle_f = \frac{\int (t - \langle t \rangle_f)^2 |f(t)|^2 dt}{\int |f(t)|^2 dt}$$

y

$$(\Delta \omega)_f^2 = \langle (\omega - \langle \omega \rangle_f)^2 \rangle_f = \frac{\int (\omega - \langle \omega \rangle_f)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}$$

satisfacen

$$(\Delta t)_f (\Delta \omega)_f \geq 1/2 . \tag{1}$$

Siendo que $(\Delta t)_f$ es una medida de la duración efectiva de la señal y $(\Delta \omega)_f$ una medida del ancho de banda efectivo de la misma, no se puede limitar arbitrariamente el ancho de banda y la duración de una señal simultáneamente. Para demostrar la desigualdad (1), se pueden seguir los siguientes pasos:

a) Reemplazando f por $(\int |f(t)|^2 dt)^{-1/2} f$ se puede suponer que f está normalizada ($\int |f(t)|^2 dt = 1$). Esto tiene como consecuencia que también \hat{f} está normalizada (la transformación de Fourier preserva la normalización, o en otras palabras es una isometría).

b) Usando la fórmula distribucional

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} dx = 2\pi \delta(y) ,$$

convéznase que

$$\langle \omega \rangle_f = -i \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \frac{df(t)}{dt} dt , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{df(t)}{dt} \right|^2 dt .$$

c) Integrando por partes se ve (tenga en cuenta la integrabilidad de $|f(t)|^2$ y de $t^2|f(t)|^2$) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df(t)}{dt} f^*(t) + \frac{df^*(t)}{dt} f(t) \right) dt = 0 ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \left(\frac{df(t)}{dt} f^*(t) + \frac{df^*(t)}{dt} f(t) \right) dt = -1 .$$

d) Si para un número complejo λ arbitrario,

$$f_\lambda(t) = (t - \langle t \rangle_f) f(t) + \lambda (df/dt)(t) - i\lambda \langle \omega \rangle_f f(t) ,$$

observe que, trivialmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\lambda(t)|^2 dt \geq 0 , \text{ para todo } \lambda \text{ complejo} ,$$

y verifique que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\lambda(t)|^2 dt = (\Delta t)_f^2 + \lambda^2 (\Delta \omega)_f^2 - \lambda , \text{ si } \lambda \text{ es real.}$$