Mecánica Cuántica I

Guía 4 – Marzo de 2009

Problema 1: La traza de una matriz está definida como la suma de los elementos de su diagonal $Tr\,(\mathbf{A}) = \sum_i A_{ii}$. Muestre que: $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$, y que la traza de una matriz es invariante ante un cambio unitario $\boldsymbol{e}_i \to U\boldsymbol{e}_i$ de base.

Problema 2: *Matrices de espín 1.* Calcular los autovalores de cada una de las matrices siguientes:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y de la matrices $S^2 \equiv S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ y $\sinh(S_3)$ (para este ultimo cálculo muestre que $S_i^3 = S_i$).

Problema 3: Tome la primera de las matrices anteriores y encuentre una base donde la matriz sea diagonal, exprese luego el vector con componentes $(1, 0, 1)$ en la nueva base.

Problema 4: *Operadores normales* Sea $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador normal, o sea $N^\dagger N = NN^\dagger$.

a) Vea que los autovectores de N son también autovectores de $N^\dagger$ y los correspondientes autovalores son los complejo-conjugados de los autovalores de N. Ayuda: calcule la norma de $(N^\dagger - \lambda^* I)u$ para $Nu = \lambda u$.

b) Pruebe que si u_1 y u_2 son dos autovectores correspondientes a diferentes autovalores de N, entonces son ortogonales entre sí.

c) Si el espacio $\mathcal{H}$ es de dimensión finita entonces N tiene un conjunto completo de autovectores ortogonales.

d) Muestre que si la dispersión $\sqrt{\langle f, N^2 f\rangle - \langle f, Nf\rangle^2}$ de N con respecto a un vector de estado f (normalizado) es cero, y N es autoadjunto, entonces el estado es un autovector de N.

Problema 5: *Operadores Unitarios (dimensión finita)* Sea U un operador unitario de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión finita.

a) Muestre que U es unitario (preserva productos escalares) si y solo si $UU^\dagger = I$.

b) Muestre que los autovalores de U tienen módulo uno.

c) Muestre que U tiene un conjunto ortogonal y completo de autovectores.

d) Muestre que existe un operador hermitiano, C, tal que $U = e^{iC}$. Ayuda: considere el operador definido en todo elemento de H por su acción en los autovectores de U: $Cu_j = -i\ln(\lambda_i)u_j$ donde u_j es un autovector de U con autovalor λ_j.

e) Muestre que si C es un operador hermitiano, entonces $U = e^{iC}$ es unitario.

Problema 6: Si A y B son operadores lineales autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ entonces la relación de incerteza es

$$(\Delta_\psi A)(\Delta_\psi B) \geq \frac{1}{2}|\langle \psi, [A,B]\psi\rangle|\ , \quad \psi \in \mathcal{H}\ , \quad \|\psi\| = 1$$

donde $(\Delta_\psi A)^2 = \langle \psi, A^2\psi\rangle - \langle \psi, A\psi\rangle^2 = \langle \psi, (A - \langle \psi, A\psi\rangle)^2\psi\rangle = \|(A - \langle \psi, A\psi\rangle)\psi\|^2$ es la dispersión cuadrada del valor esperado de A en el estado ψ. Demuestre que se cumple la igualdad si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

a) ψ es autovector de A o de B;

b) ψ no es autovector ni de A ni de B pero

$$(A - \langle \psi, A\psi \rangle)\psi = i\frac{\langle \psi, i[A,B]\psi \rangle}{2(\Delta_\psi B)^2}(B - \langle \psi, B\psi \rangle)\psi \ .$$

Problema 7: *Evolución temporal del valor de espectación de un observable*

Dado un observable A, sabemos que

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(\vec{r},t) A \psi(\vec{r},t) d\vec{r}$$

derivando respecto del tiempo

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \int \frac{\partial d\psi^*}{\partial t} A\psi \, d\vec{r} + \int \psi^* A \frac{\partial d\psi}{\partial t} \, d\vec{r} + \int \psi^* \frac{\partial A}{\partial t} \psi \, d\vec{r}$$

usando que

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

llegamos a

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle A \rangle = \langle AH - HA \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

Mostrar que esta ecuación es también válida en la representación momento.

Problema 8:

a) Mostrar que cada componente del momento angular orbital conmuta con el operador energía cinética.

b) Mostrar que se cumple

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{L} \rangle = -\langle \mathbf{r} \times \nabla V \rangle = \langle \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rangle$$

Problema 9: Considere un sistema de N partículas interactuantes cuyo Hamiltoniano es de la forma

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} \vec{p}_j^{\ 2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N)$$

donde V es el potencial del sistema. Verifique que si Ψ es un estado estacionario ligado del sistema, entonces el valor esperado del momento y de la fuerza sobre cada partícula se anulan para todo tiempo.

Problema 10: *Observables.* Sean O un observable y $|\psi\rangle$ un estado representados matricialmente por

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué puede medirse de O? Calcule.
b) Encuentre los autovectores de O. c) Calcule $\langle O \rangle$ normalizando lo que sea necesario. d) ¿Cuál es la probabilidad de medir cada autoestado?

Problema 11: *Conjunto completo de observables.* Considere el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$, con una base y producto iterno canónicos. En dicha base un operador está representado por la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{12} & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -\sqrt{12} \\ -\sqrt{12} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -\sqrt{12} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que este operador es un observable y calcule su descomposición espectral.
b) Sea otro observable dado por su matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Muestre que B es compatible con A y que conforman un conjunto completo de observables.

Problema 12: *Matriz densidad.* Sea L una constante y sean

$$\rho = \frac{1}{16L^2} \begin{pmatrix} 2L^2+8L+6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6(L^2-1) & 5L^2+3i & 0 \\ 0 & 5L^2-3i & 6(L^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L^2-8L+6 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Muestre que la matrix ρ satisface las propiedades de una matriz densidad y calcule el valor esperado del observable A.