Mecánica Cuántica I

Guía 5 – Abril de 2009

Problema 1: *Caja de potencial.* Una partícula de masa m está restringida a moverse en una dimensión entre $x = -L/2$ y $x = L/2$, donde el potencial es nulo.

a) Muestre que el Hamiltoniano es un operador hermítico cuando actúa sobre el conjunto de funciones dos veces diferenciables en $L^2([-L/2, L/2])$ que se anulan en los extremos del intervalo.

b) Determine los autovalores E_n y las autofunciones ψ_n del Hamiltoniano imponiendo como condiciones de contorno que las funciones de onda se anulen en los extremos del intervalo.

c) Determine la evolución temporal del sistema si $\psi(x, t = 0) = \sqrt{30/L}\ [(x/L)^2 - 1/4]$.

d) Cuando los límites para el movimiento son $x = 0$ y $x = L$, muestre que las soluciones pueden escribirse como

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

con $n = 1, 2, ..., \infty$.

Problema 2: *Pozo cuadrado de potencial.* Considere una partícula en el siguiente potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \\ V_o & |x| \geq a \end{cases}$$

Nos interesa estudiar los estados ligados para este sistema ($E < V_o$).

a) Encuentre una expresión para las autofunciones, y muestre que las soluciones pares tienen energías que satisfacen la ecuación trascendente

$$k \tan(ka) = \kappa \tag{1}$$

mientras que las impares tendrán energías dadas por

$$k \cot(ka) = -\kappa \tag{2}$$

donde k e $i\kappa$ son las partes real e imaginaria de los números de onda dentro y fuera del pozo, respectivamente. Note que k y κ están relacionadas por

$$k^2 + \kappa^2 = \frac{2mV_o}{\hbar^2} \tag{3}$$

b) Verifique que cuando $V_o \to \infty$ las soluciones de este problema coinciden con las de la caja de potencial.

c) Las ecuaciones (1) y (2) deben ser resueltas gráfica o numéricamente. Para el primer método, la siguiente ayuda puede resultar útil: en el plano ($\alpha = ka$, $\beta = \kappa a$) imagine un círculo que obedece (3). Los estados ligados están dados por la intersección de la curva $\alpha \tan \alpha = \beta$ o $\alpha \cot \alpha = -\beta$ con el círculo. (Recuerde que α y β son positivos).

d) Muestre que siempre existe una solución par y que no hay soluciones impares a menos que $V_o > \hbar^2\pi^2/8ma^2$. ¿Cuál es el valor de E cuando se satisface la igualdad?

Problema 3: Una partícula de masa m se mueve bajo la acción del potencial unidimensional

$$V(x) = -V_0\, \delta(x - x_0) \quad ; \quad V_0 > 0$$

a) Use la ecuación de Schrödinger para obtener las propiedades de la función de onda en $x = x_0$.

b) Dé las energías y autofunciones correspondientes a estados ligados.

c) Considere el pozo de potencial de ancho a y profundidad V_o. Tome los límites $V_o \to \infty$ y $a \to 0$ manteniendo el producto $V_o a$ finito. Muestre que hay un único estado ligado y calcule su energía. Compare con el punto (b).

d) Una partícula incide desde la izquierda con momento $\hbar k$. Calcule el coeficiente de transmisión.

e) Considere ahora que el potencial es de la forma

$$V(x) = V_0\,(\delta(x) - \delta(x - x_0))$$

Calcule el coeficiente de transmisión para $x_0 = 2\pi/k$.

Problema 4: *Barrera de potencial.* Considere la barrera rectangular de potencial definida por

$$V(x) = \begin{cases} V_o & |x| < a \\ \\ 0 & |x| \geq a \end{cases}$$

a) Obtenga los coeficientes de transmisión y reflexión tanto para valores de energía $E > V_o$ como para $0 < E < V_o$.

Grafique los mismos para valores de E/V_o entre 0 y 3. Compare sus resultados con lo que esperaría en el caso clásico.

b) Considere el caso $a \to 0, V_o \to \infty$, con aV_o=cte.

c) Escribiendo la solución general de la ecuación de Schrödinger como

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & x < -a \\ A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} & x > a \end{cases}$$

encuentre la matriz M que relaciona los parámetros A_1, B_1 con A_2, B_2. ¿Cuánto valen los coeficientes de transmisión y reflexión en términos de los elementos de esta matriz?

Problema 5:*El potencial periódico de Kronig-Penney.* Considere una partícula bajo la acción de un potencial periódico descripto por:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x - na < b \\ \\ V_o & b \leq x - na < a \end{cases}$$

con n entero.

a) Encuentre la matriz $B(\epsilon)$ que relaciona las amplitudes de onda en x y $x - a$.

b) Grafique (con ayuda de computadoras si es necesario) las bandas permitidas para la energía tomando $b = a/2$, $U_o = 100/a^2$ y $U_o = 10/a^2$, y también tomando $b = 3a/4$, $U_o = 100/a^2$ y $U_o = 10/a^2$.

Problema 6:*El peine de Dirac.* Dado un potencial periódico construído con una secuencia de funciones delta de Dirac a una distancia a entre ellas:

$$V(x) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x + na)$$

a) Determine las bandas de energía para este potencial.

b) Use el resultado del problema anterior tomando límite para $(a-b) \to 0$, $V_o \to \infty$, manteniendo $(a-b)V_o$ constante y compare con lo obtenido en a).

Problema 7:

a) Si y_1 y y_2 son, respectivamente, dos soluciones en el intervalo (a, b) de las ecuaciones

$$y_1'' + F_1(x)y_1 = 0 \qquad y_2'' + F_2(x)y_2 = 0$$

con F_1 y F_2 funciones continuas, o con discontinuidades de primera especie, muestre que

$$W(y_1, y_1)|_a^b = \int_a^b [F_1(x) - F_2(x)]\, y_1(x)y_2(x)\, dx$$

siendo $W(y_1, y_2)$ el Wronskiano de las funciones y_1 e y_2.

b) Si $F_i(x) = E_i - U(x)$, donde E_i es una constante (energía del sistema), muestre que

$$W(y_1, y_1)|_a^b = (E_1 - E_2) \int_a^b y_1(x)y_2(x)\, dx$$

c) Si y_1 e y_2 son dos soluciones correspondientes a la misma E_i, muestre que el Wronskiano es independiente de x.

d) Sea $y(x; E)$ una solución de la ecuación $y''+(E-U(x))y = 0$, y $f(x; E)$ su derivada logarítmica, con un valor determinado f_a en $x = a$. Muestre que $f(x; E)$ es una función monótona de la variable E (creciente si $x < a$ y decreciente si $x > a$), cuya derivada es

$$\frac{\partial f(x; E)}{\partial E} = -\frac{1}{y^2(x; E)} \int_a^x y^2(u; E)\, du$$