Mecánica Cuántica I

Guía 6 – Mayo de 2009

Problema 1: *Tratamiento analítico del problema del oscilador armónico.*

a) Verifique que, cuando el potencial al que se somete una partícula de masa m es $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ (donde $\omega > 0$ es constante), la ecuación de Schrödinger puede ser escrita como

$$\psi'' + (2\varepsilon - y^2)\,\psi = 0 \ ,$$

donde $y = x(m\omega/\hbar)^{1/2}$ y $\varepsilon = E/\hbar\omega$, siendo E el correspondiente autovalor del hamiltoniano.

b) Para el límite $y \to \pm\infty$, vea que la ecuación diferencial resultante $\psi'' - y^2\psi = 0$ admite soluciones del tipo $\exp(-y^2/2)$. Analice entonces para la solución general (siempre en el mismo límite)

$$\psi(y) = u(y)\, e^{-y^2/2}$$

qué condiciones deben imponerse a $u(y)$.

c) Una alternativa para resolver la ecuación diferencial resultante para $u(y)$ es proponer

$$u(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, y^k$$

y buscar la relación que debe haber entre los coeficientes C_k. Agrupando los términos de mismo orden en y, encuentre la relación de recurrencia

$$C_{k+2} = C_k\, \frac{2k + 1 - 2\varepsilon}{(k+2)(k+1)}$$

d) Analice nuevamente los límites $y \to \pm\infty$ para ver que los únicos valores permitidos para ε son $n + 1/2$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, obteniendo así el espectro de energías.

e) Vea entonces que la ecuación diferencial mencionada en c) para cada n es satisfecha por el polinomio de Hermite H_n. Derive la expresión general para las autofunciones

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\,\hbar\,2^{2n} n!^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\right]$$

Problema 2: Calcule la probabilidad de que la coordenada de un oscilador armónico en su estado fundamental tenga un valor mayor que la amplitud de un oscilador armónico clásico de la misma energía.

Problema 3: Demuestre que

$$H_n(\xi) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi + iu)^n e^{-u^2} du$$

es una representación integral de los *Polinomios de Hermite.*

Problema 4: Muestre que dado un ensamble de osciladores armónicos que respeta la distribución de Boltzmann, la probabilidad por unidad de longitud de encontrar a la prtícula con desplazamiento x es una distribución Gausiana. Grafique el ancho de la distribución en función de la temperatura. Verifique los resultados en el límite clásico y en el límite de bajas temperaturas. (Puede ser de utilidad la representación integral de los *Polinomios de Hermite*)

Problema 5: Calcular, mediante el metodo variacional, una cota para el estado fundamental del oscilador armónico utilizando la siguiente función de prueba:

$$\psi\left(x\right)=\left\{\begin{array}{cc}0 & \left|x\right|>a\\ \\ C(1-\left|x\right|/a) & \left|x\right|\leq a\end{array}\right.$$

Observe que si bien la función de prueba elegida es "mala", para el valor optimo de a el resultado difiere del valor exacto en menos de 10 por ciento.

Problema 6: Use la función generatriz de los polinomios de Hermite para obtener la expansión en autofunciones del Hamiltoniano de la función de onda que tiene la misma forma que el estado fundamental del oscilador pero que esta centrada en la coordenada a:

$$\psi(x,0)=\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega(x-a)^2}{2\hbar}\right).$$

(a) Para esta función de onda inicial, calcule la probabilidad P_n que el sistema se encuentre en el n-ésimo autoestado del oscilador, y verifique que la suma de las P_n es igual a uno.

(b) Si la partícula se mueve en el campo del potencial del oscilador con frecuencia ω centrado en el origen, usando la función generatriz derive una expresión cerrada para $\psi(x,t)$.

(c) Calcule la densidad de probabilidad $|\psi(x,t)|^2$ e interprete el resultado.

Problema 7: Para los autoestados ψ_m y ψ_n del oscilador armónico calcule $\langle\psi_m,a^\dagger\psi_n\rangle$ y $\langle\psi_m,a\psi_n\rangle$. Evalúe $\Delta X\cdot\Delta P$ para el estado ψ_n .

Problema 8: Dada $\Psi(x,0)$, la función de onda del oscilador armónico 1D en $t=0$:

a) Encontrar su evolución temporal.

b) Calcular $\langle x\rangle_t$ en función del tiempo.

c) Calcular $\langle p_x\rangle_t$ en función del tiempo.

d) Verificar que $\langle p_x\rangle_t=m\frac{d\langle x\rangle_t}{dt}$

e) Mostrar que $\langle x\rangle_t=\langle x\rangle_0\cos(\omega t)+\frac{\langle p_x\rangle_0}{m\omega}\sin(\omega t)$.

Problema 9:*Estados coherentes.* Los autoestados del operador a se definen por la relación:

$$a\,\varphi_\alpha=\alpha\varphi_\alpha\quad;\quad\text{donde }\alpha\text{ es un número complejo.}$$

a) Encuentre una expresión para los autoestados del operador a como combinación lineal de los autoestados ψ_n del oscilador armónico de masa m y frecuencia ω. Muestre que el operador $a^\dagger$ no tiene autoestados.

b) Muestre que estos estados pueden escribirse como

$$\varphi_\alpha=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp\left(\alpha\,a^\dagger\right)\psi_0=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2-\alpha^2\right)\right)\exp\left(-i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\alpha\hat{p}\right)\psi_0$$

c) Use los resultados del problema anterior para mostrar que estos estados son estados coherentes (de incerteza mínima) para los operadores posición y momento. Calcule la evolución temporal segun el Hamiltoniano del oscilador armónico para un estado coherente y para la relación de incerteza correspondiente. Compare con la evolución de un paquete de incerteza mínima para una partícula libre.

d) Muestre que la expresión de los estados coherentes en la representación coordenada está dada por la función de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} e^{i\phi(t)} \exp\left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar}[x - q(t)]^2 + i\frac{p(t)x}{\hbar} \right\}$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son, respectivamente, el momento y la posición de un oscilador armónico clásico de masa m y frecuencia angular ω. Calcule el valor de ϕ sabiendo que $\psi(x,t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico asociado.

e) Calcule el valor esperado de la energía del oscilador armónico y su dispersión para un estado coherente.

Problema 10: Calcule $(\psi_0, \exp(igx)\psi_0)$ en el estado fundamental del oscilador armónico, siendo g una constante. Relacione este resultado con $(\psi_0, x^2\psi_0)$.