Mecánica Cuántica I

Guía 8 - Junio de 2009

Problema 1. Probar que $\vec{p}$ es el generador de traslaciones infinitesimales.

Problema 2.
a) Pruebe que $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{L}$ son operadores vectoriales y r^2 y p^2 son operadores escalares.
b) Pruebe que si $\vec{A}$, $\vec{B}$ son operadores vectoriales,entonces $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es un operador escalar.
c) Pruebe que para que un operador A conmute con todas las componentes de un operador momento angular, es suficiente que conmute con dos de ellas.

Problema 3.
a) Escriba las componentes cartesianas del operador momento angular orbital $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=-i\hbar\vec{r}\times\nabla$ y de los operadores L_+, L_- y L^2 en coordenadas esféricas.

b) Use que las autofunciones de L^2 y L_z tienen la forma $Y_l^m(\theta,\varphi)=\Theta_{l,m}(\theta)\exp(im\varphi)$ para encontrar Y_l^l, sabiendo que $L_+Y_l^l=0$. Muestre que todas las autofunciones de L^2 pueden ser obtenidas de esta manera.

c) Suponga que l puede tomar valores semienteros, calcule entonces $Y_{1/2}^{1/2}$ como se describe en el inciso (b), y $Y_{1/2}^{-1/2}$ utilizando L_-. Luego calcule $Y_{1/2}^{-1/2}$ a partir de la ecuación $L_-Y_{1/2}^{-1/2}=0$ y muestre que arroja resultados contradictorios. Esto puede tomarse como argumento de la ausencia de valores semienteros para el momento angular orbital.

Problema 4. Considere las matrices de spin de Pauli:

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Muestre que el operador $\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ cumple las relaciones de conmutación de un operador momento angular.

Problema 5. Mostrar que para un sistema en el autoestado $|lm\rangle$ del operador L_z, el valor medio de la componente del operador momento angular orbital a lo largo de una dirección z, que forma un ángulo θ con el eje z, es igual a $m\cos\theta$.

Problema 6. Mostrar que en un autoestado $|lm\rangle$ del operador L_z, la mayor precisión en la medición de las componentes L_x y L_y se obtiene cuando $|m|=l$.

Problema 7. Sea P el operador paridad, tal que su acción sobre cualquier función $f(r,\theta,\phi)$ está dada por

$$Pf(r,\theta,\phi)=f(r,\pi-\theta,\phi+\pi)$$

Mostrar que $[P,\vec{L}]=0$ y, utilizando este resultado, mostrar que los armónicos esféricos Y_l^m tienen paridad definida, la cual depende sólo del número cuántico l.

Problema 8. Una partícula interactúa con un campo externo de manera tal que el Hamiltoniano está dado por

$$H=\alpha L_x \quad ;\alpha>0,$$

En $t=0$ su estado está dado por

$$|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|0,0\rangle_z+|1,1\rangle_z)$$

donde el miembro de la derecha está expresado en términos de las autofunciones $|l,m\rangle_z$ comunes de $\boldsymbol{L}^2$ y L_z, correspondiendo el primer índice al autovalor de $\boldsymbol{L}^2$ en tanto que el segundo a L_z.

a) Encuentre el espectro de energía para este Hamiltoniano.

b) Conociendo que

$$L_+|\ell,m\rangle_z=\hbar\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}|\ell,m+1\rangle_z$$

$$L_-|\ell, m\rangle_z = \hbar\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}|\ell, m-1\rangle_z$$

donde $L_z|\ell, m\rangle_z = \hbar m|\ell, m\rangle_z$, utilice algún argumento para establecer que

$$J_+|\ell, m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell-m_x)(\ell+m_x+1)}\,|\ell, m_x+1\rangle_x$$

$$J_-|\ell, m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell+m_x)(\ell-m_x+1)}\,|\ell, m_x-1\rangle_x$$

donde $J_\pm \equiv L_y \pm iL_z$ y $L_x|\ell, m_x\rangle_x = \hbar m_x|\ell, m_x\rangle_x$.

c) Exprese $|\psi(0)\rangle$ en la base $|\ell, m_x\rangle_x$ y calcule $|\psi(t)\rangle$ para todo t.

d) Calcule las probabilidades de medir: energía cero, energía distinta de cero y $L_x = \hbar$, para todo tiempo.

Problema 9. Considere una partícula de masa μ restringida a moverse en una circunferencia de radio a. Muestre que $H = L_z^2/2\mu a^2$. Resuelva el problema de autovalores de H e interprete la degeneración.

Problema 10. Para un estado representado por la función de onda

$$\psi \;=\; Ne^{-\alpha r^2}(x+y)z \quad \alpha > 0,$$

a) determine la constante de normalización N en términos del parámetro α;

b) calcule los valores esperados para $\boldsymbol{L}$ y L^2;

c) calcule las varianzas para estas cantidades.

Problema 11. *El oscilador armónico bidimensional* Considere una partícula de masa μ que sólo puede moverse en el plano x-y, bajo la acción de un potencial $V(x,y) = (\mu\omega^2/2)(x^2+\alpha y^2)$ $(\alpha > 0)$

a) Encuentre las autofunciones y los autovalores para el Hamiltoniano.

b) Para $\alpha = 1$, muestre que $[H, L_z] = 0$ y reduzca el problema de autovalores de H al de la ecuación diferencial para la función de onda radial $R(r)$.

c) Examine la ecuación para $r \to 0$ y muestre que

$$R(r)\underset{r\to 0}{\longrightarrow} r^{|m|}$$

con m entero. Analizando el límite $r \to \infty$, verifique que puede escribirse

$$R(r) = r^{|m|}\exp(-\mu\omega r^2/2\hbar)u_m(r)\ .$$

d) Realizando las sustituciones $\epsilon = E/\hbar\omega$, $y = (\mu\omega/\hbar)^{1/2}r$, muestre que debe satisfacerse la siguiente ecuación diferencial:

$$u_m'' + \left[\left(\frac{2\,|m|+1}{y}\right) - 2y\right]u_m' + (2\epsilon - 2|m| - 2)u_m = 0\ .$$

e) Escribiendo $u_m(y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell y^\ell$, halle la relación de recurrencia entre $C_{\ell+2}$ y C_ℓ. Demuestre que ℓ debe ser necesariamente par. Infiera entonces que los valores permitidos para la energía son $E_n = (n+1)\hbar\omega$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$

f) Para un dado n, ¿cuáles son los valores permitidos de $|m|$? A partir de esta información muestre que la degeneración del nivel n es $n+1$.

g) Escriba las autofunciones normalizadas completas para $n = 0, 1$.

Problema 12. Considere un electrón en un campo magnético constante de magnitud B. Utilizando el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -(\mathbf{r}\times\mathbf{B})/2$ obtenga las autoenergías posibles (niveles de Landau) y compare con los resultados obtenidos para el potencial vector $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = (0, Bx, 0)$ en el teórico.

Sugerencia: obtenga una lista lo más exhaustiva posible de las constantes de movimiento lo que conducirá al uso de coordenadas cilíndricas con el eje en dirección del campo magnético.