

Mecánica Cuántica II

Guía 1 – Agosto de 2010

Problema 1: Al discutir el problema de autovalores del momento angular orbital se analizó el caso general de un trio $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ de operadores que satisfacen las relaciones de conmutación $[J_1, J_2] = i\hbar J_3$ (y permutaciones cíclicas de los índices). Se encontró que los autovalores de $\vec{J}^2$ son de la forma $\hbar^2 j(j+1)$ donde j es un múltiplo de $1/2$ y que este autovalor es, a lo menos, de multiplicidad $2j+1$. Se construyó un sistema ortogonal de esta dimensión $\{|j, m\rangle : m = -j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ de autovectores de J_3 con $J_3|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle$ y $\vec{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle$. Usando los operadores $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ y la relación

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle ,$$

a) verifique que $\langle j, m|J_1|j, m\rangle = \langle j, m|J_2|j, m\rangle = 0$ y $\langle j, m|J_1^2|j, m\rangle = \langle j, m|J_2^2|j, m\rangle = (\hbar^2/2)(j(j+1) - m^2)$;

b) encuentre la representación matricial de los operadores $\vec{S}^{(s)} = (S_1^{(s)}, S_2^{(s)}, S_3^{(s)})$ de magnitud s para $s = 1/2, 1, 3/2$.

Problema 2: Considere las matrices de Pauli.

a) Verifique que si el vector real $\vec{u}$, de módulo unitario, tiene coordenadas esféricas (θ, φ) entonces los autovectores del operador $\vec{u} \cdot \vec{\sigma}$ son los vectores

$$|+, \vec{u}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} , \quad |-, \vec{u}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} .$$

b) Demuestre que todo operador A de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ puede escribirse univocamente como

$$A = \alpha \mathbf{1} + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\vec{\beta} \in \mathbb{C}^3$, donde $\mathbf{1}$ denota el operador identidad. Obtenga condiciones sobre α y $\vec{\beta}$ para que A sea autoadjunto, unitario, o un proyector ortogonal.

c) Para $A = A^\dagger$ autoadjunto, encuentre autovalores y autovectores de A en términos de los parámetros α y $\vec{\beta}$ correspondientes.

d) Demuestre que si $f(x)$ es real y admite desarrollo en serie de Taylor entonces para $\gamma \in \mathbb{C}$ y $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$, $f(\gamma \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}) = a \mathbf{1} + b(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma})$. Relacione a y b con f .

e) Demuestre que

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbf{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$$

donde $\vec{a}, \vec{b}$ son vectores tridimensionales arbitrarios cuyas componentes pueden ser, por ejemplo, operadores siempre y cuando estos conmuten con cada componente de $\vec{\sigma}$.

f) Si $U_R = \exp(-i\theta \vec{u} \cdot \vec{\sigma}/2) = \exp(-i\theta \vec{u} \cdot \vec{S}/\hbar)$ es el operador unitario que implementa la rotación R alrededor del eje $\vec{u}$ ($|\vec{u}| = 1$) por un ángulo θ , verifique que

$$U_R = \cos(\theta/2) \mathbf{1} - i \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \sin(\theta/2) ;$$

y

$$(U_R)^\dagger \vec{\sigma} U_R = (\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \vec{u} - \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{\sigma}) \cos(\theta) + (\vec{u} \times \vec{\sigma}) \sin(\theta) .$$

Problema 3: Considere un espín $\vec{S}$, de magnitud $s = 1/2$, con momento magnético asociado $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ en un campo magnético $\vec{B}$ dependiente del tiempo:

$$\vec{B} = (B \cos(\omega t), -B \sin(\omega t), B_o) .$$

Resuelva la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} |\psi(t)\rangle \quad , \quad S_z |\psi(0)\rangle = (\hbar/2) |\psi(0)\rangle .$$

La estructura del campo magnético sugiere que en un sistema de referencia que rota a una frecuencia $-\omega$, el hamiltoniano debiera ser independiente del tiempo.

a) Introduzca la rotación mencionada:

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i\omega t S_z / \hbar} |\psi(t)\rangle ,$$

obtenga la ecuación de movimiento para $\phi(t)$ y resuélvala.

b) Invirtiendo la rotación verifique que

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \left\{ \cos(\omega_r t/2) + i \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_r} \sin(\omega_r t/2) \right\} e^{i\omega t/2} \\ \frac{i\gamma B}{\omega_r} \sin(\omega_r t/2) e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

en la base de autovectores de S_z , donde ω_r y ω_o son ciertas frecuencias angulares.

c) Compare este estado con los descritos en el Problema 2 (a) y analice el comportamiento dinámico de espín en general y en el caso $\omega_0 = \omega$.

d) Muestre que

$$\langle \psi(t) | \mu_z | \psi(t) \rangle = \frac{\gamma \hbar}{2} \left[\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 B^2} + \frac{\gamma^2 B^2 \cos(\omega_r t)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 B^2} \right]$$

Problema 4: *Polarización en un sistema de dos niveles.* Llamamos a un sistema de dos niveles si el espacio de estados tiene dimensión 2. El ejemplo mas pertinente es el del caso de un espín 1/2; pero aparecen en física muchos otros ejemplos, en general en discusiones aproximativas. Como vimos en el problema 2, hay una particularidad en dimensión 2: todo operador A sobre $\mathbb{C}^2$ es combinación lineal de σ_1 , σ_2 , σ_3 y $\sigma_o := 1$:

$$A = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(A) \sigma_o + \sum_{j=1}^3 \text{tr}(A \sigma_j) \sigma_j \right) .$$

Reescribimos esta relación como

$$A = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(A) \mathbf{1} + \vec{A} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad , \quad \vec{A} := \text{tr}(A \vec{\sigma})$$

Si ψ es un estado (vector normalizado) del sistema el vector

$$\vec{P}_\psi := \langle \psi, \vec{\sigma} \psi \rangle$$

se denomina polarización (en el estado ψ). Se tiene

$$\langle \psi, A \psi \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(A) + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{P}_\psi .$$

a) Muestre que la polarización es un vector real de largo 1.

b) Muestre que si ψ y ϕ son vectores normalizados linealmente independientes entonces $\vec{P}_\psi \neq \vec{P}_\phi$.

c) Muestre que ψ es ortogonal a ϕ si $\vec{P}_\psi = -\vec{P}_\phi$.

Problema 5: La dinámica del sistema de dos niveles está especificada por el Hamiltoniano $H(t)$, un operador autoadjunto para todo tiempo t , via la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H(t)\psi(t) , \quad \psi(0) = \psi , \quad \|\psi\| = 1 .$$

a) Muestre que la polarización $\vec{P}(t)$ asociada a $\psi(t)$ es solución de

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{\hbar}(\vec{H}(t) \times \vec{P}(t)) ,$$

con la condición inicial $\vec{P}(0) = \vec{P}_\psi$. Considerando el caso de un espín 1/2 de razón giromagnética γ en un campo magnético externo $\vec{B}(t)$ dependiente del tiempo ¿cual es la relación entre $\vec{H}(t)$ y $\vec{B}(t)$?

b) Considere el caso donde el Hamiltoniano es independiente del tiempo (sistema conservativo) y concluya que $\vec{P}(t)$ precesa alrededor del eje $\vec{H}$ con velocidad angular constante y calculela.

c) Siempre en el caso conservativo, muestre que si $H \neq 0$, las únicas soluciones estacionarias (independientes del tiempo) unimodulares son $\pm |\vec{H}|^{-1} \vec{H}$. Establezca la relación entre estas polarizaciones estacionarias y los autovectores del Hamiltoniano.

Problema 6: Resuelva nuevamente el Problema 3 (campo magnético rotante) en el contexto de la polarización.