

Mecánica Cuántica II

Guía 5 - Noviembre de 2010

Problema 1: Considere dos partículas idénticas en el estado $\psi(\xi_1, \xi_2)$ donde ξ_j denota todas las variables asociadas con cada una de las dos partículas. Verifique que la densidad de partículas $\rho(\xi)$ ($\rho(\xi) d\xi$ es el número de partículas en el elemento infinitesimal $d\xi$ centrado en ξ) es

$$\rho(\xi) = 2 \int d\eta |\psi(\xi, \eta)|^2$$

tanto en el caso de bosones como fermiones. Si ahora

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = C [\psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_2) \pm \psi_1(\xi_2)\psi_2(\xi_1)]$$

donde ψ_1 y ψ_2 son estados normalizados de una sola partícula, C es la constante de normalización apropiada y el signo tiene en cuenta si las partículas son bosones o fermiones, verifique que entonces

$$\rho(\xi) = 2|C|^2 \left[|\psi_1(\xi)|^2 + |\psi_2(\xi)|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \psi_1^*(\xi)\psi_2(\xi) \cdot \int d\eta \psi_1(\eta)\psi_2^*(\eta) \right]$$

El último término tiene en cuenta los llamados efectos de solapamiento o intercambio. Estudie en qué casos este término será despreciable, y qué relación hay entonces con el hecho de que las partículas sean indistinguibles.

Problema 2: *La función gran partición para partículas indistinguibles.*

Se tienen N partículas idénticas no interactuantes bajo la acción de un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω . En la representación número de ocupación el Hamiltoniano toma la forma $H = \sum_i \epsilon_i \hat{n}_i$, donde $\epsilon_i = (i + 1/2)\hbar\omega$; $\hat{n}_i$ es el operador número de partículas con energía ϵ_i y el operador número total de partículas es $\hat{N} = \sum_i \hat{n}_i$. Un autoestado del sistema se representa por el vector $|n_0, n_1, \dots, n_k, \dots\rangle$ y su correspondiente energía es $E_{n_0, n_1, \dots, n_k, \dots} = \sum_i n_i \epsilon_i$.

En mecánica estadística se definió la función gran partición como

$$\Xi = \operatorname{Tr} \left(\exp \left[-\beta (H - \mu \hat{N}) \right] \right)$$

donde la traza se toma sobre estados en el espacio de Fock correspondiente.

Cálculé Ξ considerando las partículas como

- a) Bosones de espín cero.
- b) Fermiones de espín 1/2.

Problema 3: En un sistema de partículas indistinguibles se ha definido el operador unitario P_α asociado con una dada permutación α de manera que

$$P_{n_1, \dots, n_N} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle = |n_1 : \alpha_1, \dots, n_N : \alpha_N\rangle .$$

a) Verifique que

$$S = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha} \quad , \quad A = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \operatorname{sgn}(\alpha) P_{\alpha} \quad ,$$

donde $sgn(\alpha)$ es la paridad de la permutación α , son los correspondientes operadores de simetrización y antisimetrización.

b) Pruebe que S y A son proyectores, de modo que se cumple

$$S^2 = S = S^\dagger, \quad A^2 = A = A^\dagger \quad \text{y} \quad SA = AS = 0.$$

c) Verifique que

$$SP_\alpha = P_\alpha S = S \quad \text{y} \quad AP_\alpha = P_\alpha A = sgn(\alpha)A$$

para cualquier permutación P_α .

Problema 4: Si el espacio de estados $\mathcal{H}$ de una partícula, es de dimensión D (finita), entonces la dimensión del espacio $\mathcal{H}^{(N)} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \dots \otimes \mathcal{H}$ tendrá dimensión D^N . Muestre que la dimensión de los subespacios $\mathcal{H}_S^{(N)}$ totalmente simétrico y $\mathcal{H}_A^{(N)}$ totalmente antisimétrico son

$$\dim(\mathcal{H}_S^{(N)}) = \binom{D+N-1}{N} \quad ; \quad \dim(\mathcal{H}_A^{(N)}) = \begin{cases} 0 & D < N \\ \binom{D}{N} & D \geq N \end{cases} \quad (1)$$

Muestre que $\dim(\mathcal{H}_S^{(N)}) + \dim(\mathcal{H}_A^{(N)}) < \dim(\mathcal{H}^{(N)}) = D^N$ si $N \geq 3$.

Problema 5: Suponga que el Hamiltoniano H_0 de una partícula sólo actúa sobre variables orbitales y suponga además que H_0 posee sólo tres niveles no degenerados de energías 0, $\hbar\omega_0$ y $2\hbar\omega_0$ con autoestados ψ_0 , ψ_1 y ψ_3 respectivamente. Considere ahora un sistema de tres de tales partículas no interactuantes, es decir descrito por el hamiltoniano

$$H = H_0(1) + H_0(2) + H_0(3).$$

Calcule los niveles de energía, sus degeneraciones y sus correspondientes autofunciones para el caso de

a) Partículas distinguibles.

b) Electrones.

c) Bosones de espín 0.

Problema 6: Es posible estudiar la energía fundamental de un átomo con carga nuclear Ze_o y dos electrones mediante el método variacional. La función de prueba más simple es

$$\Psi_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\zeta^3}{\pi a^3} e^{-\zeta(r_1+r_2)/a}, \quad a = \frac{\hbar^2}{\mu e_o^2}$$

tomando ζ como parámetro de ajuste. Teniendo en cuenta que Ψ_ζ es el producto de estados fundamentales para un electrón (de masa μ) en el campo coulombiano generado por una carga ζe_o , se interpreta a ζ como carga efectiva en el átomo.

a) Verifique que Ψ_ζ está adecuadamente normalizada.

b) Encuentre el valor de expectación para la energía del átomo en el estado Ψ_ζ , y verifique que la mejor cota para la energía fundamental se obtiene cuando $\zeta = Z - 5/16$. Compare esta cota a la energía fundamental con el valor obtenido mediante otros métodos.

Problema 7: Verifique la normalización de la expresión

$$\Psi_{JM}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1, m_2} a_{jm_2\alpha}^\dagger a_{jm_1\alpha}^\dagger \langle jjm_1m_2 | jjJM \rangle \Psi^{(0)}$$

Problema 8: Construya explícitamente, en término de los estados de la forma $a_{jm_2\alpha}^\dagger a_{jm_1\alpha}^\dagger \Psi^{(0)}$ los autoestados del momento angular total para dos neutrones en configuraciones $(p_{1/2})^2$ y $(p_{3/2})^2$. ¿Cómo serían los autoestados del momento angular total si las partículas fueran un protón y un neutrón pero con los mismos números cuánticos del caso neutrón-neutrón?

Problema 9: Muestre que si dos partículas idénticas con los mismos números cuánticos α y con momento angular j se acoplan con momento angular total cero, el par resultante es, con notación simplificada obvia,

$$\Psi_{00}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2(2j+1)}} \sum_{m=-j}^j (-1)^m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \Psi^{(0)}$$