Mecánica Cuántica II

Guía 6 – Noviembre de 2010

Problema 1: Considere la dinámica estudiada en el Problema 3 de la Guía 1, de un espín 1/2 en un campo magnético externo dependiente del tiempo $\vec{B} = (B\cos(\omega t), -B\,\mathrm{sen}\,(\omega \mathrm{t}), \mathrm{B_o})$. Si el estado inicial α es un autovector normalizado de S_z al autovalor $\hbar/2$, calcule la probabilidad de transición de $\psi(t)$ al estado β donde β es un autovector de S_z al autovalor $-\hbar/2$. Obtenga la misma probabilidad de transición a primer orden en la magnitud B del campo rotante y compare con la exacta.

Problema 2: Considere un átomo de hidrógeno en un campo eléctrico $\vec{E} = (0, 0, E(t))$,

$$E(t) = \frac{A\tau}{\pi e}\frac{1}{t^2+\tau^2}$$

donde A y τ son constantes positivas (τ es el semiancho a la mitad del valor máximo). Suponga que para $t \to -\infty$ el átomo está en el estado fundamental y calcule la probabilidad de transición a un estado $2p$ para $t \to \infty$.

Problema 3: Un átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental en $t = -\infty$. Se aplica un campo eléctrico $\vec{E} = E\exp\left(-t^2/\tau^2\right)\vec{k}$. Muestre que la probabilidad de que el átomo de hidrógeno termine ($t \to \infty$) en alguno de los estados $n = 2$ es, a primer orden,

$$P(n=2) = \left(\frac{e\mathcal{E}}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{2^{15}a_o^2}{3^{10}}\right)\pi\tau^2 \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right)$$

donde $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$. ¿Depende la respuesta de la incorporación del espín al esquema?

Problema 4: Considere una partícula en el estado fundamental de una caja de largo L. A partir de argumentos semiclásicos concluya que el período natural asociado con su movimiento es $T \simeq mL^2/\hbar\pi$. Si la caja se expande simétricamente al doble de su tamaño en un tiempo $\tau \ll T$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en el estado fundamental de la nueva caja?

Problema 5: Un oscilador armnico de frecuencia ω y masa m está en el estado fundamental de $H = H_0 + H_1$, donde la perturbación independiente del tiempo H_1 corresponde al potencial lineal $(-fx)$. Si en $t = 0$, H_1 se desconecta abruptamente, muestre que la probabilidad de que el sistema esté en el autoestado n-ésimo de H_0 estará dada por la distribución de Poisson

$$P(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \qquad \text{donde } \lambda = \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}$$

Problema 6: Determine el cambio en las soluciones n-ésima y m-ésima de la ecuación de Schrödinger debido a la existencia de una perturbación periódica de la forma $V = Fe^{-i\omega t} + Ge^{i\omega t}$, cuya frecuencia es tal que $E_m^{(0)} - E_n^{(0)} = \hbar(\omega + \epsilon)$ donde ϵ es una cantidad pequeña.

Problema 7: Mostrar que para sistemas conservativos, si en $t = 0$ el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es un autovector de un observable A con autovalor a, para $t > 0$ $|\psi(t)\rangle$ será un autovector del operador $A_H(-t)$ con el mismo autovalor a.

Problema 8: El Hamiltoniano para un sistema de dos espines $s = 1/2$ es $H = \sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}$. Encontrar la dependencia del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ si en $t = 0$ $|\psi(0)\rangle = |+-\rangle$.

Problema 9: El estado fundamental de un átomo de hidrógeno está sujeto al siguiente potencial dependiente del tiempo $V(\vec{r}, t) = V_o\cos(kz - \omega t)$. Usando teoría de perturbaciones obtenga una expresión para la probabilidad de transición por unidad de tiempo para la emisión del electrón con momento $\vec{p}$.

Problema 10: *Efecto Auger, transición no radiativa o autoionización.* Considere un átomo de helio en un estado excitado en el cual los dos electrones de encuentran en el estado 2s. Encuentre la probabilidad de transición por unidad de tiempo hacia un estado final en el cual un electrón se encuentra en el estado 1s y el otro en el continuo con momento $\vec{p}$.

Problema 11: *Decaimiento $\beta^{\pm}$.* Calcule la probabilidad de excitación del nivel 2s de un átomo hidrogenoide si ocurre un cambio súbito de la carga nuclear $(Z \rightarrow Z \pm 1)$.