Métodos Matemáticos de la Física

Osenda — Ortiz

Guía 3 – 9 de octubre de 2012

Problema 1: La ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2}{x}\, y' + \left[K + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] y = 0 \ , \quad 0 < x < \infty$$

aparece al plantear la ecuación de Schrödinger de un átomo hidrogeno. Encuentre todos los valores de K (los autovalores) que generan soluciones ϕ con $\lim_{x\to 0^+} \phi(x)$ finito.

Problema 2: Se busca la constante K de modo que la ecuación diferencial

$$y'' - \left[\frac{1}{4} + \frac{K}{x} \right] y = 0 \ , \quad 0 < x < \infty$$

tenga una solución no trivial que se anula cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$.

Problema 3: ¿Para que valores de K es cierto que la ecuación diferencial

$$xy'' - 2xy' + (K - 3x)y = 0$$

tiene una solución acotada en $(0, \infty)$?

Problema 4: Suponga que p es continuamente diferenciable en un intervalo $[a, b]$ donde no tiene ceros y que q es continua en este intervalo. Considere el operador $Lu := (p'u')' + qu$ para funciones dos veces contiuamente diferenciables en $[a, b]$ y el problema de Sturm-Liouville $Lu = \lambda u$ con $u(a) = u(b) = 0$. Suponiendo que este último operador es invertible muestre que la función de Green es

$$G(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n}$$

donde $\{\lambda_n : \ n = 1, 2, \cdots\}$ son los autovalores de problema de Sturm-Liouville y $\{u_n : \ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ las correspondientes autofunciones normalizadas, o sea $\int_a^b u_n(x)^2 \, dx = 1$.
¿Que puede decir sobre el mismo tipo de problema con condiciones de contorno de otro tipo?

Problema 5: La ecuación diferencial de Bessel de orden cero es:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \ .$$

La función de Bessel J_o con

$$J_o(x) 1 - (x/2)^2 + \frac{1}{4}(x/2)^4 + \cdots$$

es una solucón. Muestre que hay una segunda solución para $x \neq 0$ que tiene la forma

$$J_o(x) \ln(|x|) + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \cdots$$

y encuentre los tres coeficientes A, B y C.

Problema 6: Considere la ecuación diferencial

$$x\, y'' + (2 - x)\, y' - 2\, y = 0 \ .$$

Dé dos soluciones, una regular y de valor 1 en el origen y la otra de la forma

$$\frac{1}{x} + A(x) \, \ln x + B(x) \ ,$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son regulares en el origen. Dé los primeros tres términos de los desarrollos en serie de $A(x)$ y $B(x)$.

Problema 7: Encuentre todos los puntos críticos de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $x' = x - x^2 - 2xy$ & $y' = 2y - 2y^2 - 3xy$.

b) $x' = ax - bxy$, $y' = -cy + dxy$ & $z' = z + x^2 + y^2$, donde a, b, c, d son constantes reales.

Problema 8: Considere el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de dimensión 2 general

$$x' = ax + by \quad y' = cx + dy \; .$$

Observe que $(0,0)$ es siempre un punto crítico y muestre que hay un único punto crítico si y sólo si $ad - bc \neq 0$. Además pruebe que si $ad - bc = 0$, sin que todos los coeficientes sean nulos, entonces hay una recta estacionaria.

Problema 9: Encuentre las soluciones estacionarias de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales y determine su estabilidad:

a) $x' = x - x^3 - xy^2$ & $y' = 2y - y^5 - x^4 y$.

b) $x' = x^2 + y^2 + 1$ & $y' = 2xy$.

c) $x' = \tan(x + y)$ & $y' = x + x^3$.

Problema 10: Considere un sistema presa-predador donde el predador posee un medio alternativo de sustento. Este sistema puede ser modelado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \alpha_1 \, x_1 \, (\beta_1 - x_1) + \gamma_1 \, x_1 \, x_2 \\ \dot{x_2} &= \alpha_2 \, x_2 \, (\beta_2 - x_2) - \gamma_2 \, x_1 \, x_2 \end{cases}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son las poblaciones al tiempo t de predadores y presas respectivamente y α_i, β_i y γ_i son constantes.

a) Muestre que el cambio de coordenadas

$$\beta_i \, y_i(t) = x_i \left(\frac{t}{\alpha_i \beta_i} \right)$$

reduce el sistema de ecuaciones a:

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= y_1 \, (1 - y_1) + a_1 \, y_1 \, y_2 \\ \dot{y_2} &= y_2 \, (1 - y_2) - a_2 \, y_1 \, y_2 \end{cases}$$

donde

$$a_1 = \frac{\gamma_1 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1}; \quad a_2 = \frac{\gamma_2 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2}.$$

b) ¿Cuáles son las poblaciones de equilibrio estable cuando: (i) $0 < a_2 < 1$, (ii) $a_2 > 1$?

c) Se observa que $a_1 = 3a_2$ (a_2 es una medida de la agresividad del predador). ¿Cuál es el valor de a_2 si el instinto del predador consiste en maximizar su población de equilibrio estable?