Métodos Matemáticos de la Física

Osenda — Ortiz

Guía 4 – 30 de octubre de 2012

Problema 1: Encuentre la solución de $x^2y'' - 2y = x$, para $1 \leq x < \infty$, con condiciones $y(1) = y(\infty) = 0$, utilizando la función de Green apropiada.

Problema 2: Calcule la función de Green para el problema

$$\mathcal{L}[y] = y'' + \frac{1}{4}y = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{1}$$

con condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) = 0$,

a) resolviendo la ecuación $\mathcal{L}[G(x,x')] = \delta(x - x')$ con las condiciones de contorno apropiadas,

b) utilizando las autofunciones del problema de Sturm-Liouville asociado a (1).

En ambos casos calcule la solución de (1) para los casos $f(x) = \text{sen}(2x)$ y $f(x) = x/2$.

Problema 3: Muestre que

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

suponiendo que x_0 es la unica raíz de $g(x)$ en (a,b) y $g'(x_0) \neq 0$.

Problema 4: Un sistema lineal tiene como respuesta $G(\omega)e^{i\omega t}$ a una señal de entrada $e^{i\omega t}$, donde ω es arbitrario. Si la entrada tiene la forma particular:

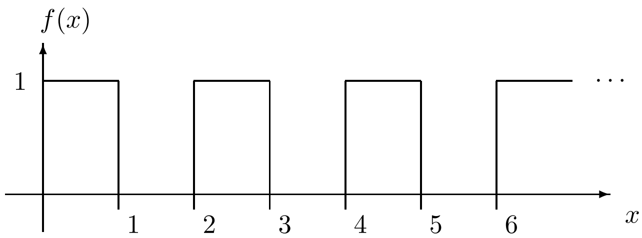
$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde λ es una constante fija, la salida resultante es:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ (1 - e^{-\alpha t})e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde α es otra constante fija.
a) Calcular $G(\omega)$.
b) Calcular la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = A\delta(t)$.

Problema 5: Calcular la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(x)]$ de la función dibujada a continuación:



Problema 6: Una función $f(x)$ tiene el siguiente desarrollo en serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}$$

Escribir la función $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en forma cerrada en términos de $f(x)$.

Problema 7: Utilizando la representación integral:

$$J_o(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x sen\theta)\, d\theta$$

calcular la transformada de Laplace de $J_o(x)$.

Problema 8: ¿De qué función es:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

la transformada de Laplace?

Problema 9: Tres nucleos radioactivos decaen sucesivamente en serie, de forma tal que los números $N_i(t)$ de cada tipo obedecen las ecuaciones:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \;\; ; \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \;\; ; \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

Si inicialmente $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_3 = n$, calcular $N_3(t)$ utilizando transformadas de Laplace.