Métodos Matemáticos de la Física

Osenda — Ortiz

Guía 5 – 1 de noviembre de 2012

Problema 1: Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, considerando el problema de valores iniciales especificado:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\ ; \qquad u(x,0) = h(x)$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\ ; \qquad u(x,0) = h(x)$

En el caso **b)**, ¿Hasta qué valor de tiempo t se pueden extender las soluciones?

Ayudas:

⋆ Especifique el campo de direcciones características asociado con cada ecuación.

⋆ Considere la curva $\gamma(s) = (s, 0, h(s))$ en $\mathbb{R}^3$. Obtenga la curva característica $\gamma(s,t)$ que pasa por cada $\gamma(s)$ en $t = 0$, resolviendo la ecuación diferencial ordinaria que determina el campo de direcciones características.

Problema 2: Considere un círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas. Sean (r, ϕ) las coordenadas polares y (x, y) las correspondientes coordenadas rectangulares del plano. Calcule la solución del problema de Dirichlet (interior) para la ecuación de Laplace ($\nabla^2 u = 0$) con las siguientes condiciones de contorno:

a) $u(r = a) = A$

b) $u(r = a) = A\ \cos\phi$

c) $u(r = a) = A + B\,y$

d) $u(r = a) = A\,x\,y$

e) $u(r = a) = A + B\ \operatorname{sen}\phi$

f) $u(r = a) = A\ \operatorname{sen}^2\phi + B\ \cos^2\phi\ ; \quad A,\ B$ ctes.

Problema 3: En el problema anterior considere condiciones de contorno de Neumann: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_c = f(\phi)$ (interior) para los siguientes casos particulares:

a) $f(\phi) = A$

b) $f(\phi) = A\,x$

c) $f(\phi) = A\,(x^2 - y^2)$

d) $f(\phi) = A\ \cos\phi + B$

e) $f(\phi) = A\ \operatorname{sen}\phi + B\ \operatorname{sen}^3\phi$

Identifique los problemas que no tienen solución única o aquellos donde la solución no depende "continuamente" de la condición de contorno.

Problema 4: Determine la distribución estacionaria de la temperatura dentro de la capa esférica $a < r < b$ si la esfera $r = a$ se mantiene a la temperatura T_1 y la esfera $r = b$ a la temperatura T_2.

Problema 5: Use la solución fundamental o función de Green para la ecuación de difusión/calor en $(-\infty, \infty)$ para determinar la solución fundamental de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,$$

en la semi-recta $(0, \infty)$ con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ para $x > 0$ y condición de borde

a) de Dirichlet; $u(0,t)=0$, $t\geq 0$.

b) de Neumann; $(\partial u/\partial x)(0,t)=0$, $t\geq 0$.

Para ello (método de las imágenes), considere la extensión del problema a todo $(-\infty,\infty)$ tomando la extensión par o impar de f, según corresponda para el caso a) o b).

Describa un método de solución para las siguientes variantes inhomogeneas:

a) de Dirichlet; $u(0,t)=g(t)$, $t\geq 0$.

b) de Neumann; $(\partial u/\partial x)(0,t)=g(t)$, $t\geq 0$.

Problema 6: Pruebe que la solución de la ec. de difusión/calor inhomogenea

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)\ ,$$

en la recta real con condición inicial $u(x,0)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, es

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\Phi(x-y,t)f(y)\,dy+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}}dy\ \Phi(x-y,t-s)F(y,s)\ ,$$

donde Φ es la solución fundamental (función de Green) del problema homogeneo.

Problema 7: En analogía con el problema 5 para la ec. de difusión/calor, considere la ec. de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,$$

en la semirecta $(0,\infty)$ con datos iniciales

$$u(x,0)=\phi(x)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\ ,\quad x>0\ ,$$

y condición de borde de Dirichlet (condición de reflexión en $x=0$):

$$u(0,t)=0\ ,\quad t\geq 0\ .$$

Use el método de las imágenes y la fórmula de d'Alembert para el problema de Cauchy de la ec. de ondas en la recta real, para obtener una expresión análoga para una solución.

Problema 8: Calcule la solución de la ecuación de Poisson en el plano:

$$\nabla^2 u(r,\phi)=1$$

dentro del círculo de radio $r=a$ si $u(r=a)=0$.

Problema 9: Resuelva el problema de las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogénea de longitud L si:

a) Los extremos de la cuerda están fijos rígidamente.

b) Los extremos de la cuerda están libres. Es decir $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ en los extremos de la cuerda. Esto tiene lugar cuando los extremos de la cuerda están sujetos mediante anillos (de masas despreciables), que deslizan sin rozamiento sobre barras paralelas.

c) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro libre.

d) Los extremos de la cuerda están fijos elásticamente, es decir que: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0,L}-h\,u|_{x=0,L}=0$.

e) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro elásticamente.

f) Un extremo de la cuerda está fijo elásticamente y el otro está libre.

Problema 10: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe, que le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ, el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = \begin{cases} v_o & |x - x_o| < \delta \\ 0 & |x - x_o| > \delta \end{cases}$$

suponiendo que el martillo golpea a una distancia x_o del extremo de la cuerda y que ésta tiene un largo L.

a) Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x,t)$ para todo $t > 0$, suponiendo que $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$.

b) Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(c^2 u_x^2 + u_t^2\right)\, \mathrm{d}x$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o "armónico".

c) Determine en qué puntos de la cuerda x_o la percusión no excita el m-ésimo modo de oscilación.

d) Bajo la razonable aproximación $\delta \ll L$, determine cuál es el armónico que más resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_o de uno de sus extremos.

Problema 11: Calcule las oscilaciones propias de una membrana circular

a) con la frontera fija rígidamente;

b) con la frontera libre.

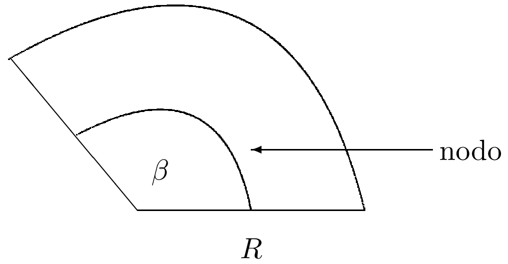
Problema 12: Calcule la frecuencia más baja de oscilación de una onda acústica en una esfera hueca de radio R. La condición de contorno es $\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$ y ϕ obedece la ecuación de ondas homogénea.

Problema 13: La cantidad u satisface la ecuación de ondas homogénea dentro de un cilindro de radio a, con la condición de contorno $u = 0$ en las paredes del cilindro. En el extremo $z = 0$ se tiene que $u = u_o\, e^{-i\omega_o t}$; es decir, se están enviando ondas a lo largo del tubo con diferentes distribuciones espaciales (modos). Encuentre la velocidad de fase del modo fundamental como función de la frecuencia ω_o e interprete el resultado para pequeños valores de ω_o.

Problema 14: Encuentre las frecuencias de oscilación más bajas de un parche de tambor en forma de triángulo isósceles recto de lados a, a y $a\sqrt{2}$.

Problema 15: Considere un parche de tambor con la forma de un sector circular de radio R y ángulo β.

a) ¿Cuál modo es el ilustrado en la figura? Dé su respuesta para $\beta = \pi/2$, π, $3\pi/2$.



b) Esquematice en un gráfico las frecuencias de los primeros seis modos como funciones de β.

Problema 16: La ecuación que describe las ondas elásticas en un medio isotrópico es:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \vec{a} - \mu\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2}$$

donde $\vec{a}$ mide los desplazamientos desde el equilibrio, ρ es la densidad, y λ y μ son las constantes elásticas del medio. Encuentre la frecuencia más baja de oscilación de una esfera elástica isotrópica de radio R, dado que:

a) $\vec{a}(\vec{x})$ es de la forma $f(r)\hat{e}_r$, y

b) la condición de contorno en $r = R$ es $\lambda\nabla \cdot \vec{a} + 2\mu \frac{\partial a_r}{\partial r} = 0$. Con el fin de calcular un número concreto, considere al final $\lambda = \mu$.

Problema 17: En el exterior de un cilindro infinitamente largo de radio a la función potencial $u(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación de ondas. El cilindro se encuentra dividido longitudinalmente, y sobre su superficie

$$u = \begin{cases} u_0 e^{-i\omega_0 t} & (0 < \phi < \pi) \\ -u_0 e^{-i\omega_0 t} & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$

Calcule $u(\vec{x}, t)$ fuera del cilindro si sólo existen ondas salientes para $r \gg a$.

Problema 18: Suponga que la densidad de neutrones n dentro del ^{235}U obedece la ecuación diferencial:

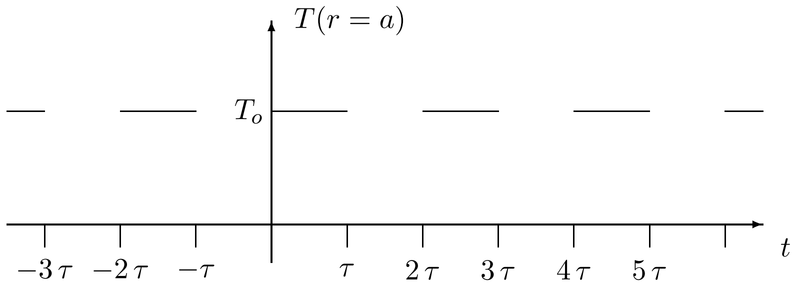
$$\nabla^2 n + \lambda n = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial n}{\partial t}$$

a) Encuentre el radio crítico R_o para el cual una esfera de ^{235}U con un radio igual o mayor a dicho valor es inestable, es decir que la densidad de neutrones en su interior crece exponencialmente con el tiempo.

b) Suponga dos hemisferios de ^{235}U que se encuentran en el límite de estabilidad. Si se juntan para formar una esfera, ésta resulta inestable, y se cumple que $n \sim e^{t/\tau}$. Encuentre la constante de tiempo τ de la explosión resultante.

Problema 19: Una esfera de radio R está uniformemente a temperatura $T = 0$. En el instante $t = 0$ se sumerge en un baño líquido a temperatura constante T_o. Calcule la subsiguiente distribución de temperatura $T(\vec{x}, t)$ dentro de la esfera. [Utilice κ = conductividad térmica / (densidad $\times$ calor específico)].

Problema 20: La temperatura en una esfera homogénea de radio a obedece la ecuación de difusión $\nabla^2 T = (1/\kappa)(\partial T/\partial t)$, con κ constante. Por acciones externas, la temperatura de la superficie de la esfera es forzada a comportarse según lo ilustrado en la figura. Calcule la temperatura $T(t)$ en el centro de la esfera.



Las alteraciones se extienden para $t = \pm\infty$.

Problema 21: Encuentre los tres autovalores más pequeños de la ecuación de Schrödinger para una partícula confinada en una caja cilíndrica de radio a y altura h:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \quad (\psi = 0 \text{ sobre las paredes}) \quad a \simeq h$$

Problema 22: Utilice la transformada coseno con respecto a y para calcular la distribución de temperatura estacionaria en un sólido semi-infinito ($x > 0$) cuando la temperatura en la superficie ($x = 0$) se mantiene constante e igual a la unidad para $-a < y < a$, y cero fuera de esa franja.

Problema 23: Un alambre recto de radio a se sumerge en un volumen infinito de líquido. Inicialmente el alambre y el líquido tienen temperatura $T = 0$. En $t = 0$ el alambre es súbitamente llevado a la temperatura T_o y a partir de entonces, mantenido a esa temperatura. Encuentre la transformada de Laplace $F(r, s)$ de la distribución de temperatura $T(r, t)$ resultante en el líquido.

Problema 24: Utilice transformadas de Fourier para calcular el movimiento de una cuerda estirada, infinitamente larga, con desplazamientos iniciales dados $y(x, 0) = \phi(x)$ y velocidad inicial nula. Los desplazamientos satisfacen la ecuación de ondas homogénea.

Problema 25: Las funciones de Green pueden calcularse para ecuaciones diferenciales homogéneas con condiciones de contorno inhomogéneas. Para ilustrar esto, considere la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 u(r,\theta) + k^2\, u(r,\theta) = 0$$

dentro del círculo de radio R, con la condición de contorno dada: $u(R,\theta) = f(\theta)$. La solución puede escribirse como:

$$u(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} G(\vec{x}, \theta')\, f(\theta')\, \mathrm{d}\theta' \,.$$

Calcule $G(\vec{x}, \theta')$.