

Problema 1: Describir el dominio de definición de las siguientes funciones y dibujarlo:

$$(a) f(z) = \frac{\bar{z}-1}{z^2+i} \quad (b) f(z) = \frac{1}{1-|z|^2} \quad (c) f(z) = \frac{z}{z+\bar{z}}$$

Problema 2: Probar que si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$

Problema 3: Expresar las siguientes funciones en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$(a) f(z) = z^3 + z - 1 \quad (b) f(z) = \frac{\bar{z}-1}{z^2+1}$$

Problema 4: Hallar los siguientes límites:

$$(a) \lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3-1}{z+i} \quad (b) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z+1} \quad (d) \lim_{z \rightarrow 1-i} (z+2i\operatorname{Re}(z))$$

Problema 5: Para cada una de las siguientes funciones complejas, usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar si existe f' . Si existe la derivada, calcularla:

$$(a) f(z) = \bar{z} \quad (b) f(z) = \bar{z}^2$$

$$(c) f(z) = \operatorname{Im}(z) \quad (d) f(z) = |z|^2$$

$$(e) f(z) = iz + 2 \quad (f) f(z) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$

$$(g) f(z) = e^{-x} e^{-iy} \quad (h) f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$(i) f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2}$$

Problema 6: Sea f una función analítica en un dominio D abierto y simplemente conexo. Probar que:

- a) Si $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$ entonces f es constante.
- b) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.
- c) Si $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

Problema 7: Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ funciones de valores reales cuyas derivadas parciales de primer orden existen en un entorno ε de un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ y son continuas en dicho punto.

- a) Usando la transformación de coordenadas Cartesianas a polares y la regla de la cadena muestre que:

$$u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta), \quad u_\theta = -u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta).$$

- b) Muestre que si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas) en (x, y) entonces satisfacen las ecuaciones

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad \frac{1}{r} u_\theta = -v_r. \quad (1)$$

- c) Recíprocamente, resuelva las ecuaciones del ítem (a) y sus similares para v despejando u_x , u_y , v_x y v_y en función de u_r , u_θ , v_r y v_θ y muestre que si las ecuaciones (1) se satisfacen entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas).

Problema 8: Probar que las siguientes funciones $u(x, y)$ son armónicas y hallar una conjugada armónica $v(x, y)$:

(a) $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ (b) $u(x, y) = 2x(1 - y)$ (c) $u(x, y) = \cosh x \cos y$

Problema 9: Probar que las curvas de nivel de una función armónica y las curvas de nivel de su conjugada armónica son perpendiculares en todo punto donde sus gradientes no se anulan. Grafique cualitativamente las curvas de nivel de las partes reales e imaginaria de $f(z) = z^2$.

Problema 10: Probar que $e^z = e^{x+iy}$ es analítica en todo el plano complejo. Probar además las siguientes igualdades:

(a) $\exp(\frac{2+\pi i}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}} (1 + i)$ (b) $\exp(z + \pi i) = -\exp z$ (c) $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$

Problema 11: Muestre que $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

Problema 12: Pruebe que

- a) $\sin(-z) = -\sin(z)$, y $\cos(-z) = \cos(z)$.
- b) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.
- c) $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_2)\cos(z_1)$.
- d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$.
- e) Tanto $\sin(z)$ como $\cos(z)$ son periódicas con período real 2π .

Problema 13: Encuentre todas las raíces de $\cos(z)$ y $\sin(z)$.

Problema 14: Pruebe que:

- a) $\sinh(-z) = -\sinh(z)$ y $\cosh(-z) = \cosh(z)$.
- b) $\cosh(z) - \sinh(z) = 1$.
- c) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$.
- d) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$.
- e) $\sinh(z) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)$.
- f) $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$.
- g) $|\sinh(z)|^2 = \sinh^2(x) + \sin^2(y)$.
- h) $|\cosh(z)|^2 = \cosh^2(x) + \cos^2(y)$.

Problema 15: Muestre que

a) $\log(i^{1/2})$ y $(1/2)\log(i)$ representan el mismo conjunto de valores.

b) $\log(i^2)$ y $2\log(i)$ NO representan el mismo conjunto de valores.

Problema 16: Muestre que para todos los puntos del semiplano complejo derecho ($z = x + iy$, $x > 0$) vale

$$\operatorname{Log}(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Problema 17: Muestre que los valores de $z^{n/m}$ definidos algebraicamente al principio del curso coinciden con los valores de $\exp(n \log(z)/m)$.

Problema 18: Se define la inversa del $\operatorname{arc sen}(z)$ como todos los valores $w \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen}(w) = z$. Muestre que

$$\operatorname{arc sen}(z) = -i \log\left(iz + (1 - z^2)^{1/2}\right).$$

analogamente muestre que

$$\operatorname{arc cos}(z) = -i \log\left(z + i(1 - z^2)^{1/2}\right).$$

Problema 19: Muestre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{arc sen}(z) &= \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \\ \frac{d}{dz} \operatorname{arc cos}(z) &= \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$