Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – Análisis Matemático IV

Guía N° 3 (2013)

Problema 1: Sea $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Pruebe que

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|dt.$$

Problema 2: Muestre que $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz$ usando el mismo camino de integración pero en sentido inverso.

Problema 3: Muestre que la integral $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \overline{z}dz$ depende del camino recorrido. Elija para ello dos caminos distintos usando líneas rectas.

Problema 4: Encuentre las integrales curvilineas de $\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^z dz$ a lo largo de los caminos utilizados en el ejercicio anterior.

Problema 5: Use el Teorema de Cauchy-Goursat o la fórmula integral de Cauchy para calcular las siguientes integrales:

a) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{2z-\pi}dz$, donde C es el círculo a) $|z| = 1$, b) $|z| = 2$.

b) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{2\ln(2)-z}dz$, donde C es el círculo a) $|z| = 1$, b) $|z| = 2$

Problema 6: Muestre que $\oint_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$, donde C es un contorno circular alrededor del punto z_0, tomado en sentido antihorario, y n es un entero.

Problema 7: Calcule $\oint_C \frac{1}{z^2-1}dz$, donde C es el círculo $|z| = 2$.

Problema 8: Utilice la desigualdad ML para hallar cotas para los módulos de las siguientes integrales

a) La integral del ejercicio anterior.

b) $\oint_{|z|=R} \frac{\operatorname{Log}(z)}{z^2}dz$, con $R > 1$.

Problema 9: Calcule las siguientes integrales (recuerde la fórmula extendidad de Cauchy)

a) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(6z-\pi)^3}dz$, donde C es el círculo $|z| = 3$.

b) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{(2\ln(2)-z)^5}dz$, donde C es el círculo $|z| = 2$.

Problema 10: Calcule las series Taylor en los centros indicados y determine los radios de convergencia

a) $f(z) = 1/z, \ z_0 = 1 + i.$ *b)* $f(z) = z^i$, (rama principal), $z_0 = 1.$

c) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}, \ z_0 = 2.$

Problema 11: Encontrar las singularidades de cada una de las siguientes funciones y clasificarlas según sean polos o singularidades esenciales. Calcule todos los desarrollos de Laurent de cada función centrados en cada singularidad.

$$a)\ f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z^2(z-\pi)}, \qquad b)\ f(z) = z\exp\Big(\frac{1}{z}\Big), \qquad c)\ f(z) = \frac{z^2}{1+z}.$$

Problema 12: Calcule los tres términos de orden más bajo, no nulos, de la serie de Laurent de $\text{cosec}(z)$ centrada en $z = 0$ que converge: *a)* alrededor del origen, *b)* en el punto $z = \pi + i$.

Problema 13: Demostrar que las singularidades de las funciones siguientes son polos. Determinar su orden y los correspondientes residuos:

$$a)\ f(z) = \frac{1-\cosh(z)}{z^3} \qquad b)\ f(z) = \tanh(z) \qquad c)\ f(z) = \frac{z}{\cos(z)}$$

Problema 14: Si C es el círculo unitario recorrido en sentido positivo, evaluar las siguientes integrales:

$$a)\ \int_C \frac{dz}{\text{sen}(z)} \qquad b)\ \int_C \frac{e^{1/z}\,dz}{z} \qquad c)\ \int_C \frac{e^{-z}}{z(z+2)}dz$$

Problema 15: Calcular la integral $\displaystyle\int_C \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$, en los siguientes casos: i) C es el círculo $|z-2| = 2$, ii) C es el círculo $|z| = 4$, ambos recorridos en sentido antihorario.

Problema 16: Probar las siguientes identidades.

$$a)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4} \qquad e)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad -1 < a < 1.$$

$$b)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad f)\ \int_0^\pi (\text{sen}(\theta))^{2n} d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$c)\ \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6} \qquad g)\ \int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{1+x^2} = 0$$

$$d)\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\,\text{sen}(\theta)} = \frac{2\pi}{3} \qquad h)\ \int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$i)\ \int_0^\infty \frac{\cos(x)\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{(a^2-b^2)}\Big(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\Big) \quad (a > b > 0)$$

Problema 17: Calcular la siguiente integral : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x^2}dx$

Problema 18: Calcular las integrales

$$a)\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx, \qquad b)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4-\pi^4}.$$