

Problema 1: Calcule la serie de Fourier de la función $f(x)$, con período 2π , definida por $f(x) = x^2$ $-\pi < x < \pi$.

Problema 2: Extienda a una función par, la función definida por $f(x) = \sin(ax)$ si $0 < x < \pi$. Calcule su serie de Fourier.

Problema 3: Calcule la serie de Fourier (de senos y cosenos) de la función $f(x)$, con período 2π , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Problema 4: Expandir la función del ejercicio anterior en su serie de Fourier con exponenciales complejas e^{inx} en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Verifique (usando la fórmula de Euler) que el resultado es el mismo que en el ejercicio anterior.

Problema 5: Considere las funciones $\sin(\frac{2\pi nx}{L})$ y $\cos(\frac{2\pi mx}{L})$ (verifique que son periódicas de período L)

a) Demuestre, por integración directa, las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$1) \int_0^L \cos(\frac{2\pi nx}{L}) \sin(\frac{2\pi mx}{L}) dx = 0$$

$$2) \int_0^L \cos(\frac{2\pi nx}{L}) \cos(\frac{2\pi mx}{L}) dx = \frac{L}{2} \delta_{n,m}$$

$$3) \int_0^L \sin(\frac{2\pi nx}{L}) \sin(\frac{2\pi mx}{L}) dx = \frac{L}{2} \delta_{n,m}$$

b) Utilice las relaciones de ortogonalidad para encontrar la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una función $f(x)$ con período L . Es decir, encuentre a_n y b_n tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) \right)$$

Problema 6: Cada una de las siguientes funciones se da a lo largo de un período. Grafique varios períodos de la función y calcule el desarrollo en serie de Fourier apropiado para cada caso:

a) $f(x) = x$ si $0 < x < 2$.

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \end{cases}$$

Problema 7: A veces es útil aproximar $\sin(\pi x)$ en el intervalo $[0, 1]$ por una parábola. Calcule que la serie de Fourier de $f(x) = 4x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$ extendida como función impar al intervalo $[-1, 1]$ y muestre que los coeficientes decaen con $1/n^3$.

Problema 8: Para cada una de las siguientes funciones periódicas, definidas en $[-\pi, \pi]$ calcular la serie de Fourier y estudiar su convergencia.

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x, -\pi < x < \pi, f(-\pi) = 0.$

Problema 9: Evaluando en un punto apropiado el desarrollo en serie de Fourier de la función 1-periódica $h(x) = -x$ si $x \in (-1/2, 0]$ y $h(x) = x$ si $x \in [0, 1/2)$, calcule el valor de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Problema 10: La función zeta de Riemann se define sobre los complejos como $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Utilice el desarrollo hallado en el problema 1 para calcular el valor de $\zeta(2)$.

Problema 11: Sea $f(x) = x$ si $x \in (-\pi, \pi]$, 2π -periódica. Desarrolle f en serie de Fourier y utilice la relación de Parseval para recuperar el resultado del problema anterior.

Problema 12: Sea $f(x) = e^{sx}$, si $x \in (-\pi, \pi]$, 2π -periódica.

a) Calcule la serie de Fourier de $f(x)$.

b) Use la serie hallada para probar que

$$\frac{\pi}{s} \coth(\pi s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2 + n^2}.$$