Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – Análisis Matemático IV

Guía N° 5 (2013)

Notación: Transformada de Fourier y fórmula de inversión

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}_{x\to\omega}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx.$$
$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\omega\to x}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)d\omega.$$

Problema 1: Pruebe que

a) $\mathcal{F}_{x\to\omega}\{f(x)e^{-ihx}\} = \hat{f}(\omega+h)$.

b) $\mathcal{F}_{x\to\omega}\{-ixf(x)\} = \dfrac{d\hat{f}}{d\omega}$.

Problema 2: Pruebe que la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$, es otra Gaussiana, a saber $\hat{f}(\omega) = e^{-\omega^2/(4\alpha)}/\sqrt{2\alpha}$. Para esto muestre que

a) $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

b) $f'(x) = -2\alpha x f(x)$.

Usando *b*) muestre que $\hat{f}'(\omega) = -\dfrac{\omega}{2\alpha}\hat{f}(\omega)$. Finalmente integre esta ecuación diferencial y determine la constante de integración usando *a*).

Problema 3: Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$. Ayuda: Usar el Teorema de los residuos.

b) $f(x) = xe^{-|x|}$.

Problema 4: Sean f y g funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las transformadas de Fourier $\hat{f}(\omega)$ y $\hat{g}(\omega)$.

Problema 5: Recordando que la convolución Fourier de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define como

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt,$$

pruebe que

a) $(f*g)(x) = (g*f)(x)$.

b) $\mathcal{F}_{x\to\omega}\{(f*g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

Problema 6: Un sistema lineal es excitado por una señal periódica $f(t)$, tal que $f(t+T) = f(t)$. La respuesta del sistema es tal que una entrada sinusoidal de frecuencia angular ω es multiplicada por $(\omega_0/\omega)^2$, a menos que $\omega = 0$, en cuyo caso no hay salida. La salida puede ser escrita como

$$g(t) = \frac{2}{T} \int_0^T G(t-t')\, f(t')\, dt'.$$

Calcule la función $G(t)$.

Problema 7: Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pruebe que la transformada de Fourier, $\hat{f}(\vec{k}) = \mathcal{F}_{\vec{x}\to\vec{k}}(f(\vec{x})$, satisface

a) $f(\vec{x}+\vec{h}) \to e^{i\vec{k}\cdot\vec{h}} \hat{f}(\vec{k})$.

b) $f(\vec{x}) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{h}} \to \hat{f}(\vec{k}+\vec{h})$.

c) $f(\delta\vec{x}) \to \delta^{-d} \hat{f}(\delta^{-1}\vec{k})$

d) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(\vec{x}) \to (ik)^{\alpha} \hat{f}(\vec{k})$, donde α es un multi índice.

e) $(-ix)^{\alpha} f(\vec{x}) \to \left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{f}(\vec{k})$, donde α es un multi índice.

Problema 8: Una rotación en $\mathbb{R}^d$ es una transformación lineal que preserva el producto interno. Osea,

a) $R(ax+by) = aR(x) + bR(y)$,

b) $R(x)\cdot R(y) = x\cdot y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Pruebe que

$$f(R\vec{x}) \to \hat{f}(R\vec{k}).$$

Como corolario, pruebe que si $f(\vec{x})$ tiene simetría esférica, entonces su transformada de Fourier también.

Problema 9: Sean (r, θ, ϕ) coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$. Calcule la transformada de Fourier de

$$f(\vec{x}) = \left(\frac{2}{\pi a^3}\right)^{3/4} e^{-r^2/a^2}.$$

Problema 10: Si $\tilde{f}(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, pruebe que

a) $\mathcal{L}_{t\to s}\{u_a(t) f(t-a)\} = e^{-as}\tilde{f}(s)$.

b) $\mathcal{L}_{t\to s}\{e^{\beta t} f(t)\} = \tilde{f}(s-\beta)$.

c) $\mathcal{L}_{t\to s}\{-t f(t)\} = \frac{d}{ds}\tilde{f}(s)$.

donde se define la función escalón $u_a(t)$ como:

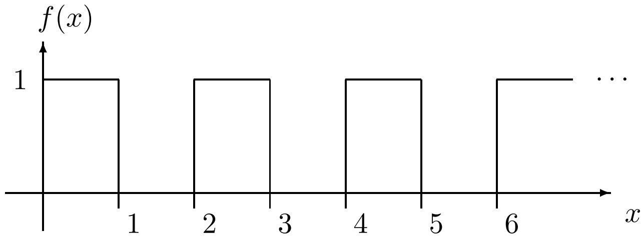
$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

Problema 11: Calcule las transformadas de Laplace de:

a) $f(t) = e^{at}$, *b)* $f(t) = \frac{\sin(at)}{a}$, *c)* $f(t) = \frac{\cos(at)}{a}$.

Problema 12: Si $h(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$ entonces $\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$.

Problema 13: Calcule la transformada de Laplace $\mathcal{L}_{x\to s}\{f(x)\}$ de la función dibujada a continuación:



Problema 14: ¿De qué función es

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

la transformada de Laplace?

Problema 15: Considere un péndulo ideal que cuelga bajo la acción de la gravedad y es perturbado por una fuerza tangente a la trayectoria dada por:

$$F(t) = F_o \cos(\omega\, t)$$

a) Determine en la aproximación de oscilaciones pequeñas el ángulo de desviación del equilibrio utilizando la transformada de Laplace.

b) Indique para qué valores de ω no se mantendrá válida para todo t la aproximación de pequeñas oscilaciones y explique porqué.

Problema 16: Tres núcleos radioactivos decaen sucesivamente en serie, de forma tal que los números $N_i(t)$ de cada tipo obedecen las ecuaciones

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3.$$

Si inicialmente $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_3 = n$, calcule $N_3(t)$ utilizando transformadas de Laplace.