Métodos Numéricos (2013)

Guía de problemas N^{o} 1

Problema 1: ¿Qué polinomio de MacLaurin se debe usar para calcular el valor de cos(0,01) con error menor que 10^{-6}.

Problema 2: Calcule las series de Taylor centradas en $x = 0$ (series de MacLaurin) de las siguientes funciones. Exprese el resultado con notación de sumatorias

a) $f(x) = \exp(x)$ *b)* $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = \sin(x)$ *d)* $f(x) = \ln(1+x)$

e) $f(x) = \sqrt{1+x}$ *f)* $f(x) = \arctan(x)$

Problema 3: La serie de Taylor de $\ln(x)$ centrada en $x = 1$ se trunca en el orden $(x-1)^{1000}$ y se utiliza para calcular el valor de $\ln(2)$. ¿Qué error se comete?

Problema 4: ¿De qué grado tiene que ser el polinomio de Taylor de $\sqrt{x}$ centrado en $x = 1$ para aproximar $\sqrt{0{,}9999999995}$ con error menor que 10^{-10}?

Problema 5: Demuestre que si $f \in C^n(\mathbb{R})$ y $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ para $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ entonces $f^{(n)}(\xi) = 0$ para algún $\xi \in (x_0, x_n)$.

Problema 6: Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) $\dfrac{n+1}{n^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, si $n \to \infty$.

b) $\dfrac{1}{x^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, si $x \to \infty$.

c) $\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, si $x \to \infty$.

Problema 7: Demostrar que

a) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$, $x \to 0$.

b) $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$, $x \to 0$.

Problema 8: Demuestre que

a) si $x_n = o(\alpha_n)$ entonces $x_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$.

b) si $x_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ e $y_n = o(\alpha_n)$ entonces $x_n + y_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$.

c) si $\alpha_n \to 0$, cuando $n \to \infty$ con $x_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ e $y_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$ entonces $x_n y_n = o(\alpha_n)$.

Problema 9: Demuestre que toda función "suave" (esto significa que existen todas las derivadas que sea necesario) se puede aproximar en un intervalo de longitud h por medio de un polinomio de grado n con un error que es menor que $\mathcal{O}(h^{n+1})$ cuando $h \to 0$.