Métodos Numéricos (2013)

Guía de problemas N° 3

Problema 1: Si se usa el método de bisección para hallar la menor raíz positiva de la ecuación $2x = \tan(x)$. ¿Cuántos pasos son necesarios para garantizar que el error es menor a 10^{-3}?

Problema 2: Dado $a > 0$, para calcular $\sqrt{a}$ consideramos $f(x) = x^2 - a = 0$.

a) Muestre que el método de Newton genera la siguiente iteración: $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.

b) Probar que para cualquier x_0, $0 < x_0 < \infty$, las aproximaciones generadas por el método de Newton satisfacen $x_n \geq \sqrt{a}$.

c) Probar que la sucesión es no-creciente ($x_n \geq x_{n+1}$ para todo n).

d) Finalmente concluir que la sucesión generada por el algoritmo converge a $\sqrt{a}$.

Problema 3: Diseñe una iteración para calcular $\sqrt[3]{R}$, donde $R > 0$. Realice un análisis del gráfico de la función $f(x)$ para determinar cuáles son los puntos iniciales para los cuales la iteración converge.

Problema 4: Encuentre una aproximación a $\sqrt{3}$ que sea correcta con una exactitud de 10^{-3} usando los métodos de bisección, Newton y Secante. Determine en primer lugar el número de iteraciones necesarias en cada caso.*Sugerencia:* Considere la función $f(x) = x^2 - 3$.

Problema 5: Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz $r \in [1, 2]$.

a) Mostrar que las siguientes funciones tienen punto fijo en r

(i) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$.
(ii) $g_2(x) = (10/x - 4x)^{1/2}$.
(iii) $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$.
(iv) $g_4(x) = (10/(x + 4))^{1/2}$
(v) $g_5(x) = x - (x^3 + 4x^2 - 10)/(3x^2 + 8x)$.

b) Realice 4 iteraciones con el método de punto fijo, si es posible, en las funciones del item anterior, comenzando con $x_0 = 1{,}5$.

c) Analice la convergencia en cada caso dado en (a).

Problema 6: Se quiere usar la fórmula de iteración $x_{n+1} = 2^{x_n - 1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^x$. Investigar si converge; en caso afirmativo estudiar hacia qué valores lo hace y para qué elecciones de x_0.

Problema 7: Demuestre que las siguientes funciones son contractivas y determine el valor del λ óptimo (de la definición de aplicación contractiva) en cada caso.

a) $(1 + x^2)^{-1}$ sobre un intervalo arbitrario.

b) $x/2$ sobre $1 \leq x \leq 5$.

c) $\arctan(x)$ sobre un intervalo arbitrario que excluya al cero.

d) $|x|^{2/3}$ sobre $|x| \leq 1/3$.

Problema 8: Sea $p > 0$, calcule el valor de $\sqrt{p + \sqrt{p + \sqrt{p + \ldots}}}$. *Ayuda:* Note que la expresión dada puede interpretarse como

$$\lim_{n\to\infty} x_n, \quad x_1 = \sqrt{p}, \quad x_2 = \sqrt{p + \sqrt{p}}, \text{ etc.}$$