Métodos Numéricos (2013)

Guía de problemas N$^{\text{o}}$ 6

Problema 1: Considere la aproximación discreta a la derivada de $f(x)$ dada por la derivada del polinomio interpolatorio en forma de Lagrange:

$$f'(x_i) \approx \sum_{j=0}^{n} f(x_i)\ell_j'(x_i) \tag{1}$$

Muestre que (1) se reduce, para $n = 2$ y en $x = x_1$ a la aproximación de diferencias finitas "centrada" $D_0 f(x_1)$.

Problema 2: Probar que D_+ y D_- conmutan.

Problema 3: Encuentre constantes α y β tales que

$$Df(x) = \frac{1}{h}\Big(\alpha f(x-2h) + \beta f(x-h) - \beta f(x+h) - \alpha f(x+2h)\Big)$$

sea una aproximación de cuarto orden de precisión para la derivada $f'(x)$.

Problema 4: Demuestre que la "regla de Simpson" efectivamente integra exactamente todos los polinomios de grado menor o igual a 3.

Problema 5: Mostrar que el error de la regla de Simpson es

$$-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad \xi \in (a,b).$$

Problema 6: La función $f(x)$, suave por pedazos, se define en el intervalo $[0,1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Calcule los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar $\int_0^1 f(x)dx$:

a) La regla del trapecio sobre el intervalo $[0,1]$.

b) La regla del trapecio, primero sobre el intevalo $[0,\frac{1}{2}]$ y luego sobre $[\frac{1}{2},1]$.

c) La regla de Simpson sobre el intervalo $[0,1]$.

d) La regla del trapecio corregida sobre el intervalo $[0,1]$.

¿Qué regla integra con menor error?

Nota: La relga del trapecio corregida es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big) + \frac{(b-a)^2}{12}\Big(f'(a)-f'(b)\Big).$$

Problema 7: Probar que la "regla del punto medio" integra exactamente polinomios de grado menor o igual que 1 y explique por qué la regla del punto medio es un fórmula de cuadratura Gaussiana.

Problema 8: Calcule el error de la fórmula de cuadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \;\approx f\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Problema 9: Encuentre una regla de cuadratura Gaussiana de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx \approx A_0f(x_0) + A_1f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Problema 10: Determinar N de modo que la regla del trapecio compuesta dé el valor de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ con seis dígitos correctos después del punto decimal, suponiendo que la función e^{-x^2} se puede evaluar sin error.

Problema 11: Repita el ejercicio anterior pero utilizando la regla de Simpson compuesta.