Métodos Numéricos (2013)

Guía de problemas N$^{\circ}$ 7

Problema 1: Sea $x(t)$ una solución suave del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Despreciando los términos de $\mathcal{O}(k^4)$ o superiores en el desarrollo de Taylor de $x(t)$ y usando la ecuación diferencial derive un método numérico de orden 3 para resolver el problema (es decir un método que sea localmente preciso de orden 4).

Problema 2: Considere la expansión de la solución para el método de Euler

$$v(t,k) = x(t) + k\varphi_1(t) + k^2\varphi_2(t) + \mathcal{O}(k^3).$$

Si para un determinado problema no disponemos de la solución exacta, podemos calcular el cociente de precisión alternativo $\tilde{Q}$ utilizando soluciones numéricas para tres pasos distintos. Dicho cociente se define como

$$\tilde{Q}(t) = \frac{v(t,k) - v(t,k/2)}{v(t,k/2) - v(t,k/4)}. \tag{2}$$

Si el programa es correcto y el paso k suficientemente pequeño, ¿A qué valor debería aproximarse $\tilde{Q}$?

Problema 3: El método de "Euler mejorado" para aproximar el problema (1) es

$$\begin{aligned} v_0 &= x_0 \\ \tilde{v}_{n+1} &= v_n + kf(v_n, t_n), \\ v_{n+1} &= v_n + kf\Big(\frac{1}{2}(v_n + \tilde{v}_{n+1}), t_n + \frac{k}{2}\Big), \quad n = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Usando desarrollos de Taylor pruebe que este método es localmente preciso de orden 3.

Problema 4: Suponga que aproxima el problema (1) con el métoco Clásico de Runge-Kutta de orden 4. La expansión de la solución para la solución de dicho método es de la forma

$$v(t,k) = x(t) + k^4\varphi_4(t) + k^5\varphi_5(t) + \mathcal{O}(k^6).$$

Pruebe que si el paso utilizado los cocientes de precisión $Q(t)$ y $\tilde{Q}(t)$ definidos en el teórico deben satisfacer

$$Q(t) = 2^4(1 + \mathcal{O}(k)), \qquad \tilde{Q}(t) = 2^4(1 + \mathcal{O}(k)).$$