**Métodos Numéricos (2013)**

Guía de problemas N$^o$ 8

**Problema 1:***(Aproximación discreta de cuadrados mínimos).* Dada una grilla $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se quiere encontrar la aproximación lineal, $p(x) = a_0 + a_1 x$, a la tabla de valores $(x_i, y_i)$ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ que minimice la norma $\ell_2$ al cuadrado de la diferencia de la aproximación con los valores $y_i$ dados; es decir que minimice

$$\sum_{i=0}^{n} (p(x_i) - y_i)^2. \tag{1}$$

Muestre que los coeficientes $a_0$ y $a_1$ que minimizan (**??**) satisfacen:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2},$$

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2}$$

**Problema 2:** Sean $f, g \in C([-1, 1])$, y

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

*a)* Utilizando este producto interno y el procedimeinto de Gram-Schmidt, calcule los cuatro primeros polinomios ortonormales que se obtienen a partir del conjunto $\{1, x, x^2, x^3 \ldots\}$.

*b)* Calcule ahora los cuatro primeros polinomios, utilizando el mismo producto interno, con el procedimiento iterativo

$$p_n(x) = (x - a_n)p_{n-1}(x) - b_n p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

donde $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - a_1$, y

$$a_n = \frac{(xp_{n-1}, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})},$$
$$b_n = \frac{(xp_{n-1}, p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}.$$

Normalice los polinomios calculados en *b*) y compare con los obtenidos en *a*).

**Problema 3:** Usando el producto interno y los cuatro primeros polinomios del problema anterior, calcule la mejor aproximación a la función $e^x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

**Problema 4:***(Polinomios de Chebyshev).* Obtenga los primeros polinomios de Chebyshev, mediante el procedimieto de Gram-Schmidt aplicado al conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$, usando el producto interno

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

*Sugerencia:* Note que con el cambio de variable $x = \cos(\theta)$,

$$(f, g) = \int_{0}^{\pi} f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))d\theta.$$