

Métodos Numéricos (2011)

Guía de problemas N° 1

Problema 1: ¿Qué polinomio de MacLaurin se debe usar para calcular el valor de $\cos(0,01)$ con error menor que 10^{-6} .

Problema 2: Calcule las series de Taylor centradas en $x = 0$ (series de MacLaurin) de las siguientes funciones. Exprese el resultado con notación de sumatorias

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \exp(x) & b) f(x) = \cos(x) \\ c) f(x) = \sin(x) & d) f(x) = \ln(1+x) \\ e) f(x) = \sqrt{1+x} & f) f(x) = \arctan(x) \end{array}$$

Problema 3: La serie de Taylor de $\ln(x)$ centrada en $x = 1$ se trunca en el orden $(x - 1)^{1000}$ y se utiliza para calcular el valor de $\ln(2)$. ¿Qué error se comete?

Problema 4: ¿De qué grado tiene que ser el polinomio de Taylor de \sqrt{x} centrado en $x = 1$ para aproximar $\sqrt{0,9999999995}$ con error menor que 10^{-10} ?

Problema 5: Demuestre que si $f \in C^n(\mathbb{R})$ y $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$ para $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ entonces $f^{(n)}(\xi) = 0$ para algún $\xi \in (x_0, x_n)$.

Problema 6: Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

$$\begin{array}{l} a) \frac{n+1}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \\ b) \frac{1}{x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \\ c) \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \end{array}$$

Problema 7: Demostrar que

$$\begin{array}{l} a) \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4), \quad x \rightarrow 0. \\ b) \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{array}$$

Problema 8: Demuestre que

$$\begin{array}{l} a) \text{ si } x_n = o(\alpha_n) \text{ entonces } x_n = \mathcal{O}(\alpha_n). \\ b) \text{ si } x_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \text{ e } y_n = o(\alpha_n) \text{ entonces } x_n + y_n = \mathcal{O}(\alpha_n). \\ c) \text{ si } \alpha_n \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ con } x_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \text{ e } y_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \text{ entonces } x_n y_n = o(\alpha_n). \end{array}$$

Problema 9: Demuestre que toda función “suave” (esto significa que existen todas las derivadas que sea necesario) se puede aproximar en un intervalo de longitud h por medio de un polinomio de grado n con un error que es menor que $\mathcal{O}(h^{n+1})$ cuando $h \rightarrow 0$.