

Métodos Numéricos (2011)

Guía de problemas N° 3

Problema 1: Se quiere calcular la raíz de una función mediante el método de bisección de forma tal que el error cometido no exceda una tolerancia prefijada, XTOL , i.e., si x_n es el último valor calculado se debe satisfacer $|x_n - r| \leq \text{XTOL}$, donde r es la raíz en cuestión. Estimar el número de iteraciones que son suficiente para este requerimiento.

Problema 2: Si se usa el método de bisección para hallar la menor raíz positiva de la ecuación $2x = \tan(x)$. ¿Cuántos pasos son necesarios para garantizar que el error es menor a 10^{-3} ?

Problema 3: Dado $a > 0$, para calcular $\sqrt{a}$ consideramos $f(x) = x^2 - a = 0$.

- a) Muestre que el método de Newton genera la siguiente iteración: $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.
- b) Probar que para cualquier x_0 , $0 < x_0 < \infty$, las aproximaciones generadas por el método de Newton satisfacen $x_n \geq \sqrt{a}$.
- c) Probar que la sucesión es no-creciente ($x_n \geq x_{n+1}$ para todo n).
- d) Finalmente concluir que la sucesión generada por el algoritmo converge a $\sqrt{a}$.

Problema 4: Diseñe una iteración para calcular $\sqrt[3]{R}$, donde $R > 0$. Realice un análisis del gráfico de la función $f(x)$ para determinar cuáles son los puntos iniciales para los cuales la iteración converge.

Problema 5: Encuentre una aproximación a $\sqrt{3}$ que sea correcta con una exactitud de 10^{-3} usando los métodos de bisección, Newton y Secante. *Ayuda:* Considere la función $f(x) = x^2 - 3$.

Problema 6: Sea $f(x) = x^3 + 4x - 10$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz $r \in [1, 2]$.

- a) Mostrar que las siguientes funciones tiene punto fijo en r
 - (i) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$.
 - (iv) $g_4(x) = (10/(x + 4))^{1/2}$
 - (ii) $g_2(x) = (10/x - 4x)^{1/2}$.
 - (v) $g_5(x) = x - (x^3 + 4x - 10)/(3x^2 + 8x)$.
 - (iii) $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$.
- b) Realice 4 iteraciones con el método de punto fijo, si es posible, en las funciones del ítem anterior, comenzando con $x_0 = 1,5$.
- c) Analice la convergencia en cada caso dado en (a).

Problema 7: Se quiere usar la fórmula de iteración $x_{n+1} = 2^{x_n-1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^x$. Investigar si converge; en caso afirmativo estudiar hacia qué valores lo hace y para distintas elecciones de x_0 .

Problema 8: La ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ tienen un cero en el intervalo $[-1, 0]$.

- a) Verificar que la función $g(x) = x^2 - 1$ tiene dos puntos fijos, y que la derivada de g en uno de los puntos fijos tiene valor absoluto mayor que 1. Notar que la existencia de un punto fijo no implica que la derivada en dicho punto tiene valor absoluto menor que 1.
- b) Mostrar que $g(x)$ en el intervalo $[-1, 0]$ satisface las condiciones de existencia de un punto fijo.
- c) Elegir x_0 próximo al punto fijo de g en $[-1, 0]$, analizar la convergencia de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$.